СПРАВОЧНИК ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ



В. А. АБЧУК, Ф. А. МАТВЕЙЧУК,
Л. П. ТОМАШЕВСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

Под общей редакцией проф. Ф. А. МАТВЕЙЧУКА

Ордена Трудового Красного Знамени
ВОЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ОБОРОНЫ СССР
МОСКВА—1979

ББК 22.18я2
А17
УДК 519.2(083)

Абчук В. А. и др.

А17 Справочник по исследованию операций/ Под общ. ред. Ф. А. Матвейчука — М.: Воениздат, 1979.— 368 с. с ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

Линейное, нелинейное и динамическое программирование, теория игр и сетевое планирование, методы моделирования по схеме марковских случайных процессов и статистические методы, математические модели маневрирования. Каждый метод иллюстрируется решением примеров.

Предназначен для офицеров Вооруженных Сил. Может быть использован всеми, кто связан с исследованием операций.

А $\frac{30501\text{-}075}{068(02)\text{-}79}$ 96-78

ББК 22.18я2
517.8(083)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выполнение грандиозных задач, поставленных XXV съездом КПСС перед партией и советским народом, невозможно без ускорения технического прогресса, усложнения всех видов деятельности людей. Принятие полноценных решений в любой области этой деятельности, будь то хозяйственная, научная или военная, основываясь только на качественном анализе, опыте и интуиции, становится все труднее. Знание методов исследования операций стало необходимым широкому кругу лиц, связанных с организацией целенаправленной деятельности коллективов, использующих современные технические средства, особенно в конфликтных ситуациях.

Опыт показывает, что в исследовании операций, как и в других областях науки, наряду с учебниками и теоретическими трудами необходимы справочные пособия.

Исходя из этого в настоящем Справочнике авторы ставили своей целью изложить основные сведения по наиболее широко применяемым методам исследования операций и на примерах показать возможности их практического использования. По методическим соображениям числовые примеры носят иллюстративный характер с условно принятыми исходными данными. Они имеют целью лишь помочь читателю в освоении на практике расчетных формул, а также найти аналогию в применении их для решения других задач. Большинство примеров относится к деятельности военного характера. Это объясняется тем, что исследование операций зародилось и первоначально развивалось в решении вопросов военного характера, а также предназначением Справочника. Однако читатель легко найдет общие черты и сходные методологические приемы в других областях. В Справочнике приводятся таблицы и графики, необходимые для выполнения расчетов.

При написании Справочника использованы изданные за последние годы книги по исследованию операций, пере-

чень которых приводится в списке литературы. Для Справочника авторы избрали наиболее употребительную терминологию и обозначения, принятые в работах советских авторов. При пользовании таблицами значений функции Лапласа необходимо учитывать отличие принятой в Справочнике интегральной формы от других, в частности от [1].

Справочник создан коллективом авторов под руководством профессора Матвейчука Ф. А., который осуществил общую редакцию книги и написал 1, 6, 7-й разделы и приложение. Профессор Абчук В. А. написал 3, 4, 5-й разделы, старший научный сотрудник Томашевский Л. П. — раздел 2.

Справочник предназначен для лиц, изучивших курс исследования операций и применяющих его в своей практической деятельности.

Авторы выражают большую признательность доктору технических наук Розенбергу В. Я. и профессору Волгину Н. С. за критические замечания и советы, высказанные ими при чтении рукописи.

Справочник подобного характера создается впервые, поэтому авторы будут весьма благодарны всем, кто сочтет нужным сообщить свои замечания и предложения по улучшению Справочника,

1. ПОДГОТОВКА РАСЧЕТОВ И ИХ ВЫПОЛНЕНИЕ

1.1. ВЫБОР ПОКАЗАТЕЛЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Исследование операций — математические методы, позволяющие установить закономерности и оценить ожидаемую эффективность процессов, протекающих в производственной, экономической, военной сферах, и получить рекомендации, которые учитываются при обосновании решения на управление этими процессами.

Применение методов исследования операций для математического моделирования тех или иных явлений требует четкого понимания их места и роли в общем процессе управления, включающем выработку решения. Выработка решения в общем случае происходит по следующей схеме: уяснение задачи (цели действий), оценка обстановки, выработка замысла выполнения задачи, выбор математической модели и выполнение с помощью нее расчетов, качественная оценка факторов, не учтенных математической моделью, анализ и синтез результатов количественной и качественной оценок и, наконец, принятие решения (рис. 1.1.1).

На основании уяснения задачи, осознания цели действий должен быть определен численный критерий оценки или показатель эффективности (целевая функция).

Основной принцип выбора показателя эффективности его строгое соответствие цели, которая должна быть достигнута в результате выполнения задачи. Показатель эффективности должен быть мерой достижения цели действий, мерой успешности выполнения задачи.

Выполнение многих действий, особенно военного характера, сопровождается элементами случайности. Исход планируемого действия, даже организованного строго определенным образом, не может быть точно предсказан, будет случайным. Поэтому в качестве показателей эффективности принимаются неслучайные характеристики случайной

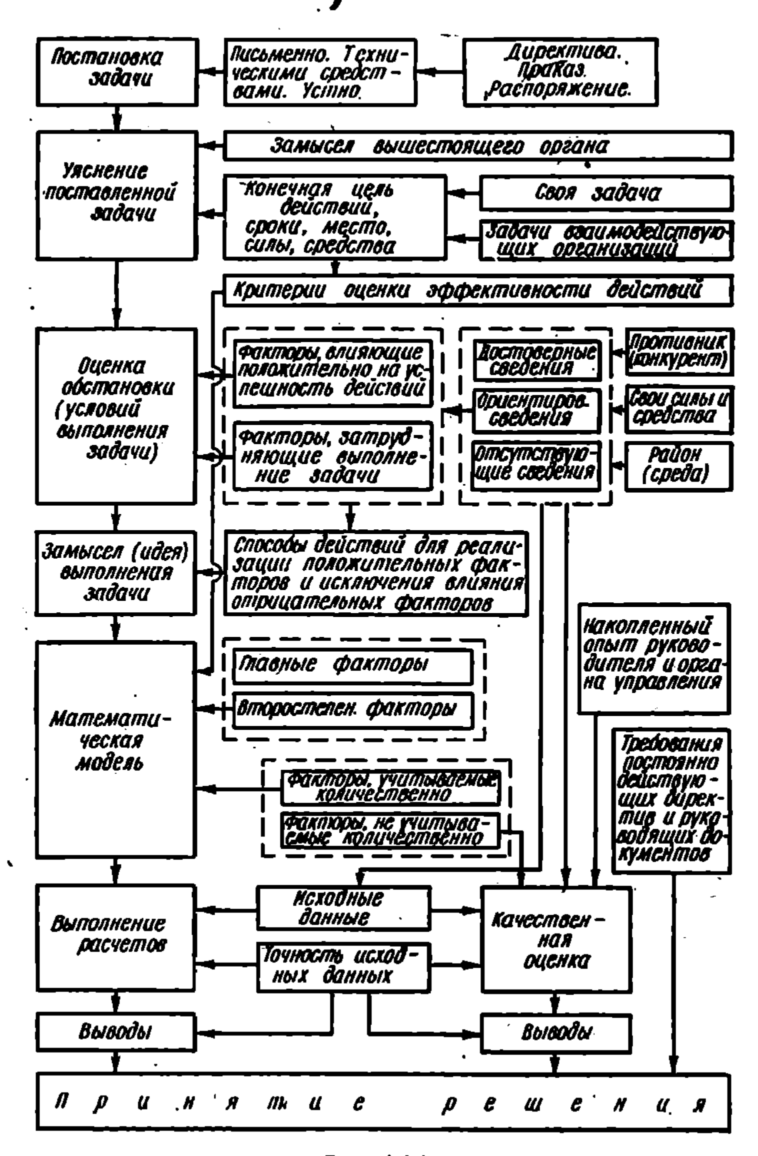

Постановка задачи
Письменно. Техническими средствами. Устно.
Директива. Приказ. Распоряжение.
Уяснение поставленной задачи
Замысел вышестоящего органа
Конечная цель действий, сроки, место, силы, средства
Своя задача
Задачи взаимодействующих организаций
Критерии оценки эффективности действий
Оценка обстановки (условий выполнения задачи)
Факторы, влияющие положительно на успешность действий
Факторы, затрудняющие выполнение задачи
Достоверные сведения
Ориентиров. сведения
Отсутствующие сведения
Противник (конкурент)
Свои силы и средства
Район (среда)
Замысел (идея) выполнения задачи
Способы действий для реализации положительных факторов и исключения влияния отрицательных факторов
Главные факторы
Второстепен. факторы
Накопленный опыт руководителя и органа управления
Математическая модель
Факторы, учитываемые количественно
Факторы, не учитываемые количественно
Требования постоянно действующих директив и руководящих документов
Выполнение расчетов
Исходные данные
Точность исходных данных
Качественная оценка
Выводы
Выводы
Принятие решения

Рис. 1.1.1

величины. В частности, для оценки ожидаемой эффективности боевых действий могут быть приняты следующие два типа показателей эффективности.

Первый — вероятность события, если задача решается достижением определенного эффекта: нанесением (предотвращением) определенного ущерба (потопление корабля противника, сохранение боеспособности обороняемого объекта, уничтожение не менее заданного числа целей и т. п.). Например, группе торпедных катеров поставлена задача уничтожить (потопить) крейсер противника, идущий в охранении эсминцев. Здесь показатель эффективности — вероятность поражения крейсера.

Второй — математическое ожидание (среднее значение), если задачей является нанесение (предотвращение) возможно большего ущерба. Например, группе торпедных катеров поставлена задача уничтожить возможно большее число транспортов из состава конвоя противника. Здесь показатель эффективности — математическое ожидание числа уничтоженных транспортов.

Для оценки эффективности элементарных действий (обнаружение цели, выдача целеуказания, классификация цели и т. п.) бывает достаточно одного-единственного показателя. Для оценки больших по объему, сложных по физической сущности явлений возникает необходимость привлечения нескольких показателей эффективности. Один из них должен быть основным, остальные — дополнительными. Основной должен соответствовать главной цели действий, достижением которой решается поставленная задача. Дополнительные — характеризовать состояние сил и средств, пространственно-временные и другие условия или ограничения. Например, эскадренному миноносцу поставлена задача в артиллерийском бою уничтожить корабль противника. Основным показателем эффективности будет вероятность поражения этого корабля. Дополнительными могут быть вероятность сохранения собственной боеспособности, время решения задачи, расход боеприпасов и т. п.

Если сложное действие может быть расчленено на составные этапы, каждый из которых оценивается независимо, как решение частной задачи, то в этом случае применяются главный и частные критерии. Частными критериями оценивается эффективность решения частных задач. Главным критерием оценивается конечный результат дей-

ствий, и для его вычисления, как правило, необходимо предварительное вычисление частных критериев. Частные критерии могут использоваться при анализе результатов количественной оценки для уяснения влияния отдельных факторов на успешность действий. Без правильно избранного показателя эффективности не могут быть получены правильные для принятия решения рекомендации.

Правильный выбор (построение) математической модели для выполнения расчетов зависит от понимания задачи, цели действий, правильного выбора показателя эффективности, глубокого понимания характера моделируемого явления, взаимосвязи факторов обстановки и выделения главных и второстепенных из них.

Математическое моделирование представляет формализацию реальных явлений и связано с определенными, заранее обусловленными ограничениями и допущениями. Степень соответствия математической модели реальным условиям зависит от уровня сложности моделируемого процесса, совершенства применяемого математического аппарата, количества и важности учитываемых факторов. Наибольшее приближение к реальным условиям достигается в моделях для описания относительно простых процессов, например таких, как выполнение маневра, целераспределение объектов удара, определение необходимого количества и видов боеприпасов для поражения цели и т. п. Более сложным является моделирование выполнения боевой задачи в целом. Здесь ряд важных факторов иногда не удается описать математическими зависимостями. В первую очередь это относится к учету морально-психологических факторов, к действиям, которые являются результатом творческой деятельности человека.

Требования к математической модели противоречивы в части полноты учета факторов. С одной стороны, она должна достаточно полно учитывать все важнейшие факторы, от которых существенно зависит эффективность действия. С другой — быть достаточно простой для практической реализации, не «засоренной» множеством мелких, второстепенных факторов, усложняющих математический анализ и затрудняющих обозримость результатов для получения выводов и рекомендаций по существу исследуемого вопроса.

Кроме выделения главных и второстепенных факторов должны быть определены те, которые не могут быть

учтены в модели из-за несовершенства математического аппарата или отсутствия количественных характеристик.

Орган управления (командир, руководитель), использующий результаты исследования операций, должен знать, какая была применена математическая модель, какие факторы ею учтены, что из главных и второстепенных факторов осталось вне расчетов и, следовательно, подлежит качественной оценке. Без этого рекомендации могут оказаться односторонними (неполными), основанными только на учете факторов, заложенных в расчеты, а принятое решение не вполне обоснованным.

Выполнению расчетов предшествует подготовка исходных данных. Здесь используются как заранее накопленные статистические и справочные данные, так и данные, полученные из оценки обстановки. Точность исходных данных, заложенных в расчеты, и точность полученного результата расчета должны быть известны. Для этого в выводах из расчетов должен указываться возможный диапазон полученных количественных характеристик, что является основанием для суждения о степени риска при том или ином способе действий.

1.2. ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА

Статистическая обработка результатов наблюдения основана на теоремах Чебышева и Бернулли. Согласно теореме Чебышева среднее арифметическое из наблюдений результатов опытов при неограниченном увеличении числа наблюдений сходится по вероятности к ее математическому ожиданию. Согласно теореме Бернулли частость события при неограниченном увеличении числа наблюдений сходится к вероятности этого события.

На практике можем получить конечное, иногда совсем небольшое число наблюдений. Поэтому по их результатам возможно лишь приближенно судить о значениях искомых вероятностных характеристик.

Статистические оценки должны быть состоятельными, несмещенными и эффективными.

Статистическая оценка состоятельна, если она сходится по вероятности с искомой величиной; не смещена, если при любом объеме выборки ее математическое ожидание сов-

падает с искомым параметром; эффективна, если из нескольких состоятельных и несмещенных оценок выбирается та из них, которая обладает наименьшей дисперсией.

1.2.1. Определение моментов случайных величин (математического ожидания и дисперсии)

Состоятельной и несмещенной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C), \quad (1.2.1)$$

где x_i — значение величины, наблюдаемое в i-м опыте;
n — количество опытов (объем выборки);
C — произвольное число, вводимое для удобства расчетов («ложный нуль»).

Если случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, то среднее арифметическое является также и эффективной оценкой.

При статистической оценке дисперсии возможны два случая: когда математическое ожидание случайной величины неизвестно и когда оно известно.

При неизвестном значении математического ожидания случайной величины состоятельной и несмещенной оценкой дисперсии будет

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)^2 - \frac{n}{n-1}\left(\tilde{x} - C\right)^2. \quad (1.2.2)$$

При известном математическом ожидании случайной величины несмещенная оценка дисперсии определяется по формуле

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \quad (1.2.3)$$

где $\bar{x}$ — математическое ожидание случайной величины.

При большом объеме выборки элементы статистического ряда целесообразно объединить в группы (разряды), представив результаты наблюдений в виде упорядоченного вариационного ряда (табл. 1.2.1).

Таблица 1.2.1

№ разряда	1	2	...	k
Граница разряда $x_{l-1}-x_l$	x_0-x_1	x_1-x_2	...	$x_{k-1}-$ $-x_k$
Среднее значение для разряда $\overset{*}{x}_l$	$\overset{*}{x}_1$	$\overset{*}{x}_2$	...	$\overset{*}{x}_k$
Численность разряда m_l	m_1	m_2	...	m_k
Частота разряда $\overset{*}{p}_l=\frac{m_l}{n}$	$\overset{*}{p}_1$	$\overset{*}{p}_2$	...	$\overset{*}{p}_k$

В этом случае оценка математического ожидания и дисперсии приближенно определяется по формулам:

$$\tilde{x}=\sum_{l=1}^{k}\overset{*}{x}_l\overset{*}{p}_l; \tag{1.2.4}$$

$$\tilde{D}_x=\sum_{l=1}^{k}\left(\overset{*}{x}_l-\tilde{x}\right)^2\overset{*}{p}_l. \tag{1.2.5}$$

Дисперсия с учетом поправки Шеппарда может быть определена по более точной формуле

$$\tilde{D}_x=\sum_{l=1}^{k}\left(\overset{*}{x}_l\right)^2\overset{*}{p}_l-\frac{h^2}{12}, \tag{1.2.6}$$

где h — длина интервала разряда.

Если известно, что исследуемая случайная величина распределена нормально, то несмещенная оценка среднего

квадратического отклонения при малом числе опытов определяется по формулам:

— при неизвестном значении математического ожидания

$$\tilde{\sigma}_x = k_n \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{n-1{,}45}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2}; \qquad (1.2.7)$$

— при известном значении математического ожидания

$$\tilde{\sigma}_x = k_{n+1} \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}, \qquad (1.2.8)$$

где

$$k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)};$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Значения коэффициента k_n приведены в табл. 1.2.2.

Таблица 1.2.2

n	k_n	n	k_n	n	k_n
3	1,1284	10	1,0280	30	1,0087
4	1,0853	12	1,0230	35	1,0072
5	1,0640	15	1,0181	40	1,0064
6	1,0506	20	1,0134	45	1,0056
7	1,0423	25	1,0104	50	1,0051

Если x_1, y_1, ..., x_n, y_n — значения случайных величин, полученные в результате n независимых опытов, проиэ-

веденных в одинаковых условиях, то состоятельные и несмещенные оценки для математических ожиданий $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, дисперсий $\tilde{D}_x$, $\tilde{D}_y$ и корреляционного момента $\tilde{k}_{xy}$ случайных величин определяются по формулам:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \tilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; \qquad (1.2.9)$$

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2;$$

$$\tilde{D}_y = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{y}\right)^2; \qquad (1.2.10)$$

$$\tilde{k}_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)\left(y_i - \tilde{y}\right). \qquad (1.2.11)$$

Оценку коэффициента корреляции находят по формуле

$$\tilde{r}_{xy} = \frac{\tilde{k}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \qquad (1.2.12)$$

Пример 1.2.1. При определении максимальной скорости корабля v_{max} (относительно грунта) на мерной линии были получены следующие значения: 30,9; 31,2; 30,3; 31,5; 32,0 уз. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение максимальной скорости корабля, полагая, что максимальная скорость корабля имеет нормальное распределение.

Решение. По формуле (1.2.1) определяем математическое ожидание максимальной скорости корабля

$$\tilde{v}_{max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i = \frac{30{,}9 + 31{,}2 + 30{,}3 + 31{,}5 + 32{,}0}{5} = 31{,}2 \text{ уз}.$$

Для определения среднего квадратического отклонения максимальной скорости воспользуемся формулой (1.2.7), предварительно выбрав из табл. 1.2.2 коэффициент $k_8 = 1{,}064$.

$$\tilde{\sigma}_v = k_n \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(v_i - \tilde{v}\right)^2} = 1{,}064\sqrt{\frac{1}{4}1{,}63} = 0{,}67 \text{ уз.}$$

1.2.2. Определение точности и надежности статистических оценок

Вероятность того, что искомый параметр будет иметь отклонение по абсолютной величине не более заданного значения ε, называется *доверительной вероятностью*, а интервал величиной 2ε (от $+\varepsilon$ до $-\varepsilon$), в котором может находиться искомый параметр, называется *доверительным интервалом.*

Доверительный интервал характеризует точность статистической оценки, а доверительная вероятность — ее надежность. При заданном числе опытов каждому доверительному интервалу соответствует доверительная вероятность; и наоборот. Повысить надежность статистической оценки, т. е. увеличить доверительную вероятность или сузить доверительный интервал при сохранении надежности, возможно путем увеличения числа опытов.

Ниже рассматривается нахождение точности и надежности статистических оценок для случайных величин, нормально распределенных. В большинстве случаев даже при сравнительно небольшом числе опытов n закон распределения случайной величины бывает близким к нормальному.

Доверительная вероятность α для математического ожидания при известном среднем квадратическом отклонении находится из условия

$$\alpha = P\left\{\left|\tilde{x} - \bar{x}\right| < \varepsilon\right\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (1.2.13)$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа

(интеграл вероятности),

или по формуле

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{(-1)}(\alpha), \qquad (1.2.14)$$

где $\Phi^{(-1)}(\alpha)$ — функция, обратная функции Лапласа.

При неизвестном σ доверительная вероятность для математического ожидания определяется по формуле

$$\alpha = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t)\,dt, \qquad (1.2.15)$$

где $S_n(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ — закон распределения Стьюдента.

Значения t_α даны в табл. 1 приложения, входами в которую являются число степеней свободы $k=n-1$ и доверительная вероятность α.

Доверительная вероятность α для среднего квадратического отклонения определяется по формуле

$$\alpha = P\{|\tilde{\sigma}-\sigma| < \varepsilon\} = P\left\{\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right\} =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi)\,d\chi, \qquad (1.2.16)$$

где $P_k(\chi) = \dfrac{\chi^{k-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{k-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$; $k = n-1$; $q = \dfrac{\varepsilon}{\tilde{\sigma}}$.

Значения $\int\limits_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi)\,d\chi$ приведены в табл. 2 приложения.

Пример 1.2.2. С помощью радиолокационной станции произведено пять независимых измерений расстояния до ориентира. Среднее значение расстояния равно $\tilde{x}=16740$ м. Средняя квадратическая ошибка измерения расстояния с помощью данной РЛС известна и равняется $\sigma=30$ м. Найти с надежностью 95% доверительный интервал для измеряемой величины.

Решение. Используем зависимость (1.2.13). Решая уравнение $\alpha=\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0{,}95$, из табл. III [1] находим

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}=1{,}96,$$

откуда

$$\varepsilon=\frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\sigma=\frac{1{,}96\cdot 30}{\sqrt{5}}=26{,}3 \text{ м}.$$

Следовательно, границами доверительного интервала будут:
— верхняя 16740 м + 26,3 м = 16766,3 м;
— нижняя 16740 м — 26,3 м = 16713,7 м.

Пример 1.2.3. [16]. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения их срока службы, которые оказались равными: $\tilde{x}=3000$ ч и $\tilde{\sigma}=20$ ч. Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить:

а) доверительный интервал для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности 0,90;

б) с какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения математического ожидания не превзойдет 10 ч, а ошибка в определении среднего квадратического отклонения σ будет меньше 2 ч?

Решение. А. При определении границ доверительного интервала для математического ожидания воспользуемся уравнением (1.2.15).

В табл. I приложения по $k=n-1=16-1=15$ и $\alpha=0{,}90$ находим $t_\alpha=\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}=1{,}753$, откуда $\varepsilon=\frac{1{,}753\sigma}{\sqrt{n}}=8{,}765$ ч.

Поэтому искомые границы доверительного интервала для $\tilde{x}$ будут:
— верхняя 3000 + 8,765 = 3008,765 ч;
— нижняя 3000 — 8,765 = 2991,235 ч.

При определении границ доверительного интервала для σ используем табл. 3 приложения. Входами в эту таблицу являются величины $k = n - 1$ и доверительная вероятность α. Для $k = n - 1 = 15$ и $\alpha = 0{,}90$ находим $\nu_1 = 0{,}775$; $\nu_2 = 1{,}437$.

Таким образом, при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}90$ значения σ лежат в пределах от $0{,}775 \cdot \tilde{\sigma} = 0{,}775 \cdot 20 = 15{,}50$ ч до $1{,}437 \cdot \tilde{\sigma} = 1{,}437 \cdot 20 = 28{,}74$ ч.

Б. Вероятность того, что значение ошибки определения математического ожидания окажется в пределах -10 ч $< \tilde{x} - \bar{x} < 10$ ч, определяется распределением Стьюдента

$$\alpha = P\left\{\left|\tilde{x} - \bar{x}\right| < \varepsilon\right\} = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t)\,dt.$$

Из табл. 1 приложения по $t_\alpha = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}} = \dfrac{10\sqrt{16}}{20} = 2$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 15$ находим $\alpha = 0{,}93$.

Таким образом, вероятность того, что ошибка в определении математического ожидания срока службы ламп не превысит ± 10 ч, составляет 0,93.

Для определения вероятности того, что ошибка найденного среднего квадратического отклонения будет в пределах -2 ч $< \tilde{\sigma} - \sigma < 2$ ч, воспользуемся χ-распределением (1.2.16).

По $q = \varepsilon/\tilde{\sigma} = 2/20 = 0{,}1$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 15$ из табл. 2 приложения находим искомую величину вероятности $\alpha = 0{,}41$.

1.2.3. Критерии согласия теоретического и статистического законов распределения

Теоретический закон распределения случайной величины может быть известен до опыта. Так, известно, что рассеивание снарядов, бомб, ошибки измерения для многих измерительных приборов и другие подчиняются нормальному закону. В этом случае статистические оценки параметров используются без проверки согласия принятого закона распределения с теоретическим.

Если закон распределения случайной величины до опыта неизвестен, необходимо вначале сделать заключение о виде

его, затем проверить согласие с предполагаемым теоретическим законом распределения.

Заключение о виде статистического закона распределения случайной величины можно сделать, построив гистограмму распределения или статистическую функцию распределения.

Статистическое распределение обычно не совпадает достаточно точно с теоретическим. Причинами этого могут быть как конечное число опытов, так и неудачный выбор теоретического закона распределения. Влияние каждой из причин объективно существует, поэтому нельзя категорически утверждать, что теоретический закон распределения подобран правильно, или отвергнуть тот или иной закон распределения. Можно, избрав некоторую меру расхождения между предполагаемыми теоретическим и статистическим распределениями, найти вероятность того, что при данном числе опытов и при правильном подборе теоретического распределения мера расхождения будет не меньше полученной из опыта. Величина этой вероятности служит критерием согласия между теоретическим и статистическим распределениями. Если вероятность мала, то маловероятно, что расхождение объясняется малым числом испытаний. В этом случае следует предполагать, что теоретическое распределение плохо согласуется с данными опыта.

Наиболее употребительны критерий согласия Пирсона и критерий согласия Колмогорова.

В критерии согласия К. Пирсона (критерий χ^2) за меру расхождения принимается величина χ^2, опытное значение χ^2_q которой определяется формулой

$$\chi^2_q = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (1.2.17)$$

где l — число разрядов, на которые разбиты все опытные значения величины;

n — общее число наблюдений (объем выборки);

m_i — число наблюдений в i-м разряде;

$p_i = \frac{m_i}{n}$ — вероятность того, что случайная величина примет значение в пределах i-го разряда, вычисленная для теоретического закона распределения.

Вероятность того, что случайная величина меры расхождения χ^2 примет значение не меньшее, чем наблюденное значение χ_q^2:

$$\alpha = P\left\{\chi^2 > \chi_q^2\right\}. \qquad (1.2.18)$$

является функцией χ_q^2 и параметра k, называемого числом степеней свободы.

Число степеней свободы определяется по формуле

$$k = l - r - 1, \qquad (1.2.19)$$

где r — число параметров теоретического закона распределения, вычисляемых по опытным данным.

Например, для нормального закона распределения $r=2$, если оба параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение) используются из статистических оценок, и $r=1$, если один из параметров известен до опыта, а другой найден по результатам испытаний.

Для применения критерия согласия Пирсона в общем случае необходимо, чтобы объем выборки n и число наблюдений в разрядах m_i были достаточно велики (практически считается достаточным, чтобы было $n > 50 \div 60$, $m_i > 5 \div 8$).

В критерии согласия А. Н. Колмогорова за меру расхождения между теоретическим и статистическим распределениями принимается наибольшее абсолютное значение D разности теоретической и статистической функций распределения. Опытное значение D_q величины D определяется формулой

$$D_q = \max |\tilde{F}(x) - F(x)|. \qquad (1.2.20)$$

где $\tilde{F}$ — статистическая, а F — теоретическая функции распределения.

При $n \to \infty$ закон распределения величины $\lambda = \sqrt{n}\,D$ независимо от вида закона распределения случайной величины стремится к закону распределения Колмогорова.

Значения вероятностей

$$\alpha_q = P(D > D_q) = P(\lambda) = 1 - k(\lambda) \qquad (1.2.21)$$

приведены, например, в [17].

Пример 1.2.4. Получены данные по времени, затрачиваемому на устранение неисправности прибора. Результаты в виде упорядоченного вариационного ряда приведены в табл. 1.2.3.

Таблица 1.2.3

№ разряда	1	2	3	4	5
Граница разряда $t_{l-1}-t_l$, с	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
Среднее значение для разряда t_l^*, с	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5
Численность разряда m_l	15	75	100	50	10
Частота разряда $p_l^* = \frac{m_l}{n}$	0,06	0,30	0,40	0,20	0,04

А. Определить подходящие значения математического ожидания и дисперсии времени, затрачиваемого на устранение неисправности.

Б. Используя критерий χ^2, проверить гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения.

Решение. А. Пользуясь формулами (1.2.4) и (1.2.5), вычисляем математическое ожидание $\tilde{t}$ и дисперсию $\tilde{D}_t$ времени, затрачиваемого на устранение неисправности:

$$\tilde{t} = \sum_{l=1}^{5} t_l^* p_l^* = 22{,}5\cdot 0{,}06 + 27{,}5\cdot 0{,}30 + 32{,}5\cdot 0{,}40 + 37{,}5\cdot 0{,}20 + 42{,}5\cdot 0{,}04 = 31{,}8 \text{ с};$$

$$\tilde{D}_t = \sum_{l=1}^{5} \left(t_l^* - \tilde{t} \right)^2 p_l^* = (-9{,}3)^2\cdot 0{,}06 + (-4{,}3)^2\cdot 0{,}30 + 0{,}7^2\cdot 0{,}40 + 5{,}7^2\cdot 0{,}20 + 10{,}7^2\cdot 0{,}04 = 22{,}01 \text{ с}^2.$$

$$\tilde{\sigma}_t = 4{,}691 \text{ с}.$$

Б. Для проверки гипотезы о согласии наблюдений с законом нормального распределения:

1) Вычислим координаты границ интервалов z_l относительно $\tilde{t}$ в единицах $\tilde{\sigma}$. Результаты расчета занесены в табл. 1.2.4.

Таблица 1.2.4

№ интервалов	$z_{l-1} - z_l$	p_l	np_l	$m_l - np_l$	$\frac{(m_l - np_l)^2}{np_l}$
1	$-2,516 \div -1,450$	0,0735	18,4	−3,4	0,629
2	$\div -0,348$	0,2770	69,3	5,7	0,469
3	$\div 0,682$	0,4018	100,4	−0,4	0,002
4	$\div 1,748$	0,2074	51,8	−1,8	0,063
5	$\div 2,814$	0,0403	10,1	−0,1	0,001

$\chi_q^2 = 1,16$

2) По формуле $p_l = \frac{1}{2}\left[\Phi(z_l) - \Phi(z_{l-1})\right]$, где $\Phi(z)$ берется из табл. III [1], вычисляем теоретические вероятности. При этом левая граница первого интервала (−2,516) заменяется $-\infty$, правая граница последнего интервала 2,814 заменяется $+\infty$. Значения p_l занесены в табл. 1.2.4.

3) По формуле (1.2.17) находим

$$\chi_q^2 = \sum_{l=1}^{5} \frac{(m_l - np_l)^2}{np_l} = 1,16.$$

Вычисления приведены в табл. 1.2.4.

4) По формуле (1.2.19) находим число степеней свободы $k = l - r - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$.

5) Из табл. 4 приложения по входным величинам $\chi_q^2 = 1,16$ и $k = 2$ находим

$$\alpha = P\left(\chi^2 > \chi_q^2\right) = 0,568.$$

Гипотеза о нормальном законе распределения времени устранения неисправности прибора не опровергается.

1.3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТОВ

1.3.1. Основные источники погрешностей

Погрешности, встречающиеся в математических задачах, могут быть в основном разбиты на пять групп.

1. Погрешность метода. Математическая модель редко отображает реальное явление точно. Сделанные допущения и ограничения по условиям и учитываемым факторам упрощают математическую модель, но делают ее приближенной, что в результате дает погрешность метода.

Возможным путем в оценке погрешности метода может быть сравнение результатов с данными, полученными по более совершенным математическим моделям (применение которых на практике затруднено), или с данными опытов. В большинстве случаев оценка аналитических моделей производится сравнением с данными, полученными по моделям метода статистических испытаний.

2. Остаточная погрешность. Погрешности этой группы являются результатом того, что функции, фигурирующие в математических формулах, часто задаются в виде бесконечных последовательностей или рядов (например, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$), что в расчетах вынуждает остановиться на некотором члене последовательности.

3. Начальные погрешности. Так условно названы погрешности, связанные с наличием в математических формулах числовых параметров, значения которых могут быть определены лишь приближенно.

4. Погрешности округления. Эти погрешности возникают вследствие использования конечного числа цифр при изображении чисел в десятичной или другой позиционной системе счисления (например, полагая $\frac{1}{3}=0{,}333$, допускаем погрешность округления).

5. Погрешности действий. Погрешности этой группы связаны с действиями над приближенными числами и являются неустранимыми, так как погрешности исходных данных в определенной мере переходят в результат вычислений.

1.3.2. Общие правила вычислительной работы

Чтобы сэкономить труд вычислителя, уменьшить возможность допущения ошибок, а также рационально использовать вычислительную технику и вспомогательные средства, необходимо придерживаться определенных правил, выработанных практикой.

Прежде всего необходимо разработать рациональную вычислительную схему.

Например, для вычисления значений $W(t)$ по формуле

$$W(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right]$$

можно рекомендовать вычислительный бланк, приведенный в табл. 1.3.1.

Таблица 1.3.1

Исходные данные			Порядок расчета					Ответ
α	β	t	$\alpha+\beta$ (1)+(2)	$x=(\alpha+\beta)t$ (3) × (4)	e^{-x} По табл. значений e^{-x}	$1-e^{-x}$ 1 − (6)	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (1) : (4)	$W(t)$ (7)×(8)
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Второе, на что необходимо обращать внимание, — это на контроль вычислений, без которого вычисление не может считаться законченным. Если объем вычислений большой, то следует на определенных этапах осуществлять *текущий*, а в целом *заключительный* контроль.

Третье условие — оценка точности. Исходные данные в большинстве случаев являются приближенными величинами. Поэтому даже для точной математической модели

на каждом этапе вычислений возникают погрешности действий и погрешности округлений.

Непременным должно быть соблюдение следующего правила, сформулированного академиком А. Н. Крыловым: «Точность вычислений должно сообразовывать с точностью данных, а точность данных — с той практической потребностью, для которой результат вычисления нужен» [32].

1.3.3. Запись приближенных чисел

Степень точности приближения характеризуют абсолютной и относительной погрешностью.

Абсолютная погрешность Δx есть разность, т. е.

$$\Delta x = |x - x_0|, \qquad (1.3.1)$$

а относительная погрешность δ_x — отношение, т. е.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x_0|}, \qquad (1.3.2)$$

где x_0 — точное значение некоторой величины;
x — приближенное значение x_0.

Обычно точное значение величины неизвестно. В этом случае находят предельную абсолютную погрешность, которая не меньше абсолютной погрешности, т. е. $\Delta x \geqslant |x - x_0|$. А при вычислении предельной относительной погрешности в формуле (1.3.2) точное значение x_0 заменяется ее приближенным значением x.

Приближенные числа следует записывать, сохраняя в них лишь *верные знаки*. Число верных знаков зависит от абсолютной погрешности величины. При этом верными будут все знаки такого числа, абсолютная погрешность которого не превышает одной единицы разряда последней цифры этого числа. Например, если абсолютная погрешность числа 42300 равна 100, то это число должно быть записано в виде $423 \cdot 10^2$ или $4{,}23 \cdot 10^4$.

Оценить погрешность приближенного числа можно по количеству верных значащих цифр. Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. При под-

счете значащих цифр не считаются нули с левой стороны. Например, число $2{,}45 \cdot 10^{-4}$ имеет три верные значащие цифры, число 0,01857 — четыре и число 7,8400 — пять. Числа 0,7 и 0,70 неравнозначны, так как первое из них содержит одну, а второе — две верные значащие цифры.

Если число x имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность будет

$$\delta x < \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}, \tag{1.3.3}$$

где z — первая значащая цифра числа x.

Пример 1.3.1. Выданы результаты расчета вероятностей поражения цели $W_1 = 0{,}70$ и $W_2 = 0{,}20$. Определить относительные погрешности результатов расчета.

Решение. Для величины $W_1 = 0{,}70$, которая получена с $n = 2$ верными значащими цифрами, а $z = 7$ будем иметь:

$$\delta W_1 < 1/(z \cdot 10^{n-1}) = 1/(7 \cdot 10) = 0{,}014, \text{ т. е. } \delta W_1 < 1{,}4\,\%.$$

Соответственно для $W_2 = 0{,}20$ ($n = 2$, $z = 2$) имеем $\delta W_2 < 1/(2 \cdot 10) = 0{,}05$, т. е. $\delta W_2 < 5\%$.

Если бы было выдано значение $W_1 = 0{,}7$, то относительная погрешность его составит $\delta W_1 < 1/7 = 0{,}14$, т. е. $\delta W_1 < 14\%$.

1.3.4. Предельная погрешность функции

Если задана дифференцируемая функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то предельная абсолютная погрешность Δu и предельная относительная погрешность δu функции u определяются по формулам

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i; \tag{1.3.4}$$

$$\delta u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \right| \Delta x_i, \tag{1.3.5}$$

где Δx_i — предельные абсолютные погрешности аргументов x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Пример 1.3.2. Вероятность обнаружения объекта при поиске определяется формулой $p = 1 - e^{-\gamma t}$. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности p, если $\gamma = 0{,}7\ \frac{1}{ч}$, $\Delta\gamma = \pm 0{,}05\ \frac{1}{ч}$, $t = 1{,}2$ ч.

Решение. По формуле (1.3.4) вычисляем предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta p = \left|\frac{\partial p}{\partial \gamma}\right| \Delta\gamma = \left|e^{-\gamma t}\right| \Delta\gamma = \left|e^{-0{,}7 \cdot 1{,}2}\right| 0{,}05 = 0{,}022,$$

т. е. $\Delta p = 2{,}2\%$.

По формуле (1.3.5) вычисляем предельную относительную погрешность:

$$\delta p = \left|\frac{\partial}{\partial \gamma} \ln p\right| \Delta\gamma = \left|\frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-\gamma t}}\right| \Delta\gamma =$$

$$= \left|\frac{e^{-0{,}7 \cdot 1{,}2}}{1 - e^{-0{,}7 \cdot 1{,}2}}\right| 0{,}05 = 0{,}038,$$

т. е. $\delta p = 3{,}8\%$.

Из общих формул (1.3.4) и (1.3.5) вытекают известные частные правила для определения погрешностей при сложении, вычитании, умножении, делении, возведении в степень и других действиях.

При выполнении расчетов, в которых берется разность двух близких по значению величин, возможна потеря точности. Избежать этого можно выбором рациональной схемы расчета. Например, для $y = x - x^2$

$$\delta y = \frac{\Delta x + 2\Delta x}{|x - x^2|}.$$

При $x \to 1$ относительная погрешность δy может стать сколь угодно большой.

Изменив схему расчета на $y = x(1 - x)$, будем иметь $\delta y = 2\delta x$. Последний прием вычисления предпочтительнее.

Для функции, значение которой находится с помощью таблицы, оценку погрешности производят следующим образом. Если аргумент задан с погрешностью Δx, то находят приращение функции, соответствующее $\pm\Delta x$. Абсолютная величина этого приращения будет предельной абсолютной погрешностью функции.

Изложенные выше правила дают верхнюю оценку погрешности результата вычислений, так как при этом предполагается, что абсолютные погрешности компонентов усиливают друг друга. Практически это бывает сравнительно редко.

При большом количестве вычислений, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, рекомендуется пользоваться следующими правилами:

а) при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в числе с наименьшим числом десятичных знаков;

б) при умножении и делении приближенных чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим числом верных значащих цифр;

в) при возведении в степень приближенного числа в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет основание степени;

г) при извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько верных цифр имеет подкоренное выражение;

д) во всех промежуточных результатах следует сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила, в окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается;

е) если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которое согласно предыдущим правилам обеспечивает $k+1$ верную цифру в результате.

Если некоторые данные имеют излишние младшие десятичные разряды (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр, чем другие (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), то их нужно предварительно округлить, сохраняя одну «запасную» цифру.

При соблюдении указанных правил можно считать, что в среднем получаемые результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

1.3.5. Обратная задача теории погрешностей

Эта задача математически неопределенна, так как заданную предельную погрешность Δu функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно обеспечить, устанавливая по-разному предельные абсолютные погрешности Δx_i ее аргументов.

Один из простейших методов решения обратной задачи основан на *принципе равных влияний.*

Если задана предельная абсолютная погрешность Δu, то предельные абсолютные погрешности аргументов x_i согласно этому принципу определяются по формуле

$$\Delta x_i = \frac{\Delta u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}. \tag{1.3.6}$$

Если допустить, что предельная абсолютная погрешность всех аргументов одна и та же, то Δx_i вычисляется по формуле

$$\Delta x_i = \frac{\Delta u}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}. \tag{1.3.7}$$

При допущении, что точность измерения всех аргументов одинакова, т. е. предельные относительные погрешности аргументов равны между собой, Δx_i вычисляются по формуле

$$\Delta x_i \doteq \frac{|x_i|\,\Delta u}{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}. \tag{1.3.8}$$

Формулы (1.3.6)—(1.3.8) не всегда применимы. Возможны случаи, когда предельные абсолютные погрешности независимых переменных окажутся настолько малыми, что добиться соответствующей точности практически невозможно. В таких случаях следует отступить от принципа равных влияний и за счет разумного уменьшения погрешностей одной части переменных добиться увеличения погрешностей другой части переменных.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2.1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

2.1.1. Общие сведения

Последовательный анализ является методом статистического исследования при проверке гипотез, при котором после каждого наблюдения производится анализ всех предыдущих наблюдений случайной величины x.

Метод последовательной проверки гипотезы H_0 относительно гипотезы H_1 основан на применении на каждой стадии эксперимента (m-м испытании) некоторого правила принятия одного из трех возможных решений.

Правило определяет три попарно-непересекающиеся области $\overset{\circ}{R}_m$, R'_m и R_m множества всех возможных выборок $(x_1, \ldots, x_m)$ объема m, таких, что если наблюденная выборка, начиная с $m=1$, попала в область $\overset{\circ}{R}_m$, то принимается 1-е решение (гипотеза H_0), если в область R_m, то эксперимент продолжается и проводится очередное $m+1$-е испытание.

Область R'_m называется *критической областью* W и однозначно определяется ошибками двух родов.

Ошибка 1-го рода, если отклоняется гипотеза H_0, в то время как она истинна. *Ошибка 2-го рода* — если гипотеза H_0 принимается, в то время как истинна конкурирующая гипотеза H_1.

Вероятность ошибки 1-го рода α равна вероятности попадания наблюденной выборки в критическую область W, вычисленной при гипотезе H_0, а вероятность ошибки 2-го рода β — вероятности непопадания выборки в область W, вычисленной при гипотезе H_1.

Вероятности α и β допускают следующую важную практическую интерпретацию. При большом количестве выборок доля ложных заключений равна α, если верна гипотеза H_0, и равна β, если верна гипотеза H_1.

Процесс последовательной проверки характеризуется:

— допускаемым риском, связанным с принятием неверных решений;

— оперативной характеристикой принятого последовательного критерия;

— функцией среднего числа наблюдений критерия;

— конкретным последовательным критерием проверки статистических гипотез.

Допускаемый риск определяется выбором четырех чисел: ошибками 1-го рода (α) и 2-го рода (β), а также верхней (θ_0) и нижней (θ_1) границами областей принятия и отклонения проверяемой гипотезы.

Ошибки α и β и значения θ_0 и θ_1 выбираются на основе оценки последствий, к которым приводит неправильное решение, так чтобы вероятность забраковать партию (классифицировать изделие или тактический прием неудовлетворительным) не превышала величины α, когда истинное значение неизвестного параметра $\theta < \theta_0$, и вероятность принять партию (признать изделие или тактический прием удовлетворительным) не превышала β, когда $\theta > \theta_1$.

Оперативная характеристика критерия определяет вероятность того, что процесс закончится принятием проверяемой гипотезы H_0. Она является функцией неизвестного параметра распределения случайной величины θ и обозначается $L(\theta)$. Оперативная характеристика показывает, насколько хорошо данное правило проверки соответствует принятию правильного решения.

Функция среднего числа наблюдений критерия характеризует среднее число наблюдений n для заданного критерия, зависит только от параметра θ и обозначается $E(n)$.

Оптимальным критерием для наиболее важного в исследовании операций случая, когда проверке подвергается простая гипотеза при единственной конкурирующей гипотезе, является *последовательный критерий отношения вероятностей Вальда.*

В среднем метод последовательного анализа требует в 2 раза меньше испытаний, чем классические методы проверки гипотез.

2.1.2. Проверка партии продукции методом отбраковки дефектных изделий

Подобная задача встречается при приемке массовой продукции, оценке заданного тактического приема или факта осуществления проверяемого действия (обнаружение объекта, уклонение от противника) и т. д.

Математическая формулировка задачи.

Пусть x — случайная величина, которая может принимать только два значения: 0 и 1, и p — неизвестная вероятность того, что x принимает значение 1. Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что p не превышает некоторой заданной величины p'. Величина p означает относительное число дефектных изделий в партии. При $p < p'$ партия принимается, при $p > p'$ нет.

Допускаемый риск определяется из требований, чтобы вероятность забраковать партию не превышала заданной величины α, когда $p < p_0$, и вероятность принять партию не превышала β, когда $p > p_1$.

Принятие партии изделий рассматривается как ошибка, имеющая значение тогда (и только тогда), когда $p > p_1$, а отказ от принятия партии, когда $p < p_0$. Если $p_0 < p < 1$, то может быть принято любое решение. Допускаемый риск характеризуется числами p_0, p_1, α и β.

Методика проведения последовательного критерия.

1) Рассчитываются значения

$$\frac{1-\beta}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad \frac{1-p_0}{1-p_1}, \quad \frac{1-p_1}{1-p_0}, \quad \frac{p_1}{p_0}. \qquad (2.1.1)$$

2) Определяются значения приемочного (a_m) и браковочного (r_m) чисел:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{\ln\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\ln\dfrac{p_1}{p_0}-\ln\dfrac{1-p_1}{1-p}} + m\,\frac{\ln\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}{\ln\dfrac{p_1}{p_0}-\ln\dfrac{1-p_1}{1-p_0}};\\ r_m &= \frac{\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\ln\dfrac{p_1}{p_0}-\ln\dfrac{1-p_1}{1-p_0}} + m\,\frac{\ln\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}{\ln\dfrac{p_1}{p_0}-\ln\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}. \end{aligned}\right\}^{*} \quad (2.1.2)$$

3) На m-м испытании вычисляется число дефектных изделий

$$d_m = \sum_{l=1}^{m} x_l$$

и проверяется условие $a_m < d_m < r_m$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Если } a_m < d_m < r_m \text{ — испытания продолжаются,}\\ &\text{если } d_m > r_m \text{ — партия бракуется, а}\\ &\text{если } d_m < a_m \text{ — партия принимается.} \end{aligned}\right\} \quad (2.1.3)$$

Способы реализации критерия.

Табличный способ. Составляется таблица, в которую до начала испытаний заносятся величины $m=1, 2, \ldots;$ a_m и r_m, а в процессе испытаний — величины $d_m = \sum_{l=1}^{m} x_l$.

Решение принимается в соответствии с (2.1.3).

Графический способ. На графике, где по оси абсцисс откладывается число m, а по вертикальной оси — число d_m, строится зона решений, границами которой служат парал-

* В формулах этого раздела правомерно использовать и десятичные логарифмы.

лельные линии L_1 и L_0, называемые *линиями решения*. Их угловой коэффициент равен

$$s = \frac{\ln \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\ln \frac{p_1}{p_0} - \ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}.$$

пересекают ось d_m в точках h_0 и h_1

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{p_1}{p_0} - \ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}; \\ {}_1 &= \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{p_1}{p_0} - \ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.5)$$

Область выше линии $L_1 - R_m'$ определяет область браковки, между линиями L_0 и $L_1 - R_m$ — область безразличия, а ниже $L_0 - R_m^0$ — область приемки изделий. В процессе испытаний точки (m, d_m) наносятся на график.

$$\left.\begin{aligned} &\text{При } (m, d_m) \in R_m \text{ испытания продолжаются,} \\ &\text{при } (m, d_m) \in R_m' \text{ партия бракуется.} \\ &\text{при } (m, d_m) \in R_m^0 \text{ партия принимается.} \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.6)$$

Оперативная характеристика критерия $L(p)$ строится по пяти значениям p. В этом случае:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } p = 0 && L(0) = 1; \\ &\text{для } p = p_0 && L(p_0) = 1 - \alpha; \\ &\text{для } p = p_1 && L(p_1) = \beta; \\ &\text{для } p = s && L(s) = \frac{h_1}{h_1 + |h_0|}; \\ &\text{для } p = 1 && L(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.7)$$

Функция $L(p)$ монотонно убывает с увеличением p, поэтому пять точек вполне удовлетворительно определяют форму кривой $L(p)$.

Функция среднего числа наблюдений критерия $E_p(n)$ строится по пяти значениям p. В этом случае:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{для } p_0 = 0 \\
&E_{p=0}(n) = \frac{\ln \dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \dfrac{1-p_1}{1-p_0}}; \\
&\text{для } p = p_0 \\
&E_{p_0}(n) = \frac{(1-\alpha)\ln \dfrac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \ln \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{p_0 \ln \dfrac{p_1}{p_0} + (1-p_0)\ln \dfrac{1-p_1}{1-p_0}}; \\
&\text{для } p = p_1 \\
&E_{p_1}(n) = \frac{\beta \ln \dfrac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{p_1 \ln \dfrac{p_1}{p_0} + (1-p_1)\ln \dfrac{1-p_1}{1-p_0}}; \\
&\text{для } p = 1 \\
&E_{p=1}(n) = \frac{\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \dfrac{p_1}{p_0}}; \\
&\text{для } p = s \\
&E_s(n) = -\frac{\ln \dfrac{\beta}{1-\alpha} \cdot \ln \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{E_s(z)},
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.8)$$

где

$$E_s(z) = \ln \frac{p_1}{p_0} \ln \frac{1-p_0}{1-p_1}. \qquad (2.1.9)$$

При применении усеченного критерия испытания прекращаются при $n=n_0$, где n_0 — заданное число испытаний. Здесь

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } d_{n_0} > \dfrac{a_{n_0}+r_{n_0}}{2} \text{ — партия бракуется,} \\ \text{если } d_{n_0} < \dfrac{a_{n_0}+r_{n_0}}{2} \text{ — партия принимается.} \end{array}\right\} \quad (2.1.10)$$

Пример 2.1.1. Путем моделирования варианта боевых действий проверить целесообразность предлагаемого тактического приема. Тактический прием будем считать целесообразным, если ему соответствует вероятность выполнения задачи $W > 0{,}8$. Пусть с вероятностью $\alpha < 0{,}02$ допустимо принятие решения о том, что тактический прием целесообразен, хотя $W < 0{,}7$, и пусть с вероятностью $\beta < 0{,}03$ также допустимо принятие решения о том, что прием нецелесообразен, хотя $W > 0{,}9$. Таким образом, требуется проверить целесообразность предлагаемого тактического приема при допускаемом риске:

$$p_0 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;\ p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;\ \alpha = 0{,}02 \text{ и } \beta = 0{,}03.$$

Построить оперативную характеристику критерия и функцию среднего числа наблюдений.

Решение. 1. Проверка целесообразности тактического приема.

А. Табличный способ.

а) По формулам (2.1.2) рассчитываются a_m и r_m при $m=1$, 2, ... и заносятся в табл. 2.1.1.

б) Проводится моделирование. После каждого $m=1$, 2, ... вычисляется d_m, заносится в табл. 2.1.1 и сравнивается с a_m и r_m.

Таблица 2.1.1

m	a_m	d_m	r_m	m	a_m	d_m	r_m
1	...	0	...	12	...	2	6
2	...	0	...	13	...	3	6
3	...	1	...	14	0	3	6
4	...	1	4	15	0	4	6
5	...	1	4	16	0	5	6
6	...	1	4	17	0	6	7
7	...	1	5	18	0	7	7
8	...	1	5	19	0		7
9	...	2	5	20	1		7
10	...	2	5	21	1		7
11	...	2	5	22	1		7

в) При $m = 18$ $d_m = r_m$. Проверка закончилась. Тактический прием отклоняется.

Б. Графический способ.

а) По формулам (2.1.4) и (2.1.5) рассчитываются s, h_0 и h_1 ($s_0 = 0{,}303$, $h_0 = -4{,}6$ и $h_1 = 2{,}5$) и строится зона решений (рис. 2.1.1).

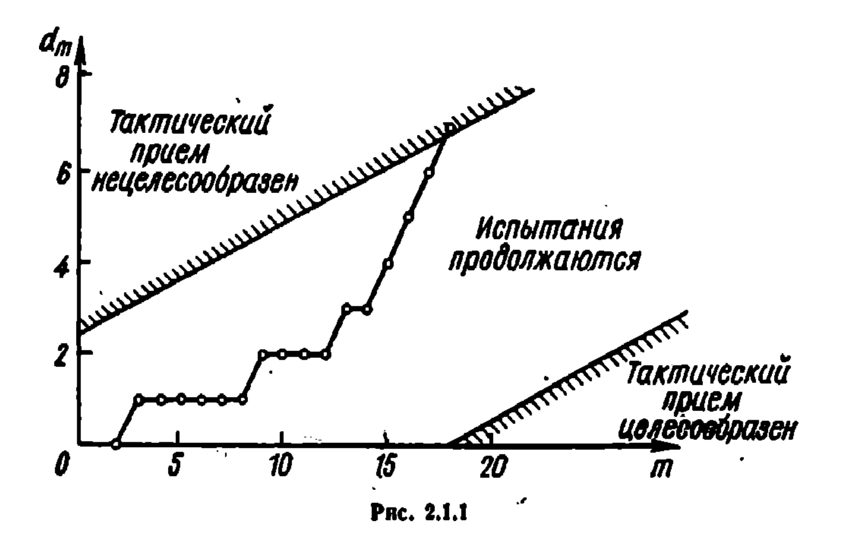


Рис. 2.1.1

б) Проводится моделирование. После каждого $m = 1, 2, \ldots$ вычисляется d_m.

в) Точки (m, d_m) последовательно после каждого эксперимента наносятся на график рис. 2.1.1. Анализируется местоположение очередной точки.

г) При $m = 18$ точка (m, d_m) оказалась в зоне браковки. Тактический прием отклоняется.

2. Построение оперативной характеристики критерия.

а) По формулам (2.1.7) рассчитываются $L(p)$: $L(0) = 1$; $L(0{,}1) = 0{,}98$; $L(0{,}19) = 0{,}44$; $L(0{,}3) = 0{,}03$ и $L(1) = 0$.

б) Строится график $L(p)$ (рис. 2.1.2). Из анализа функции $L(p)$ следует, что выбранные значения α и β обеспечили большую мощность критерия, что обеспечивает высокую надежность проверки.

3. Построение функции среднего числа наблюдений критерия.

а) По формулам (2.1.8) рассчитываются $E_p(n)$: $E_{p=0}(n) = 13{,}8$; $E_{p_0}(n) = 34{,}8$; $E_s(n) = 50{,}4$; $E_{p_1}(n) = 32{,}6$; $E_{p=1}(n) = 3{,}5$.

б) Строится график $E_p(n)$ (рис. 2.1.3).

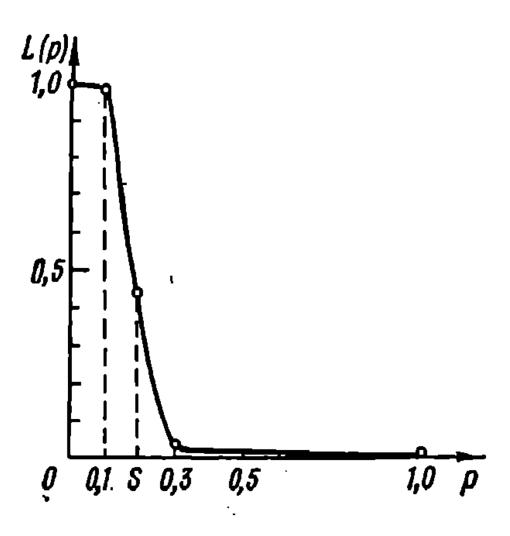


Рис. 2.1.2

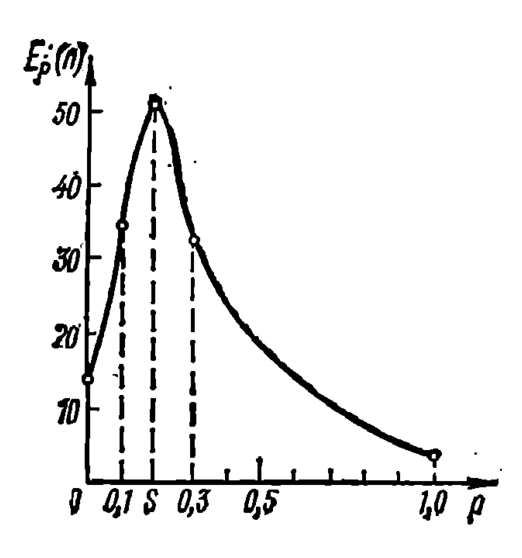


Рис. 2.1.3

2.1.3. Сравнительная оценка эффективности двух систем

Подобная задача возникает при сравнении эффективности двух тактических приемов, приемке двух партий боеприпасов, двух систем оружия, оцениваемых по вероятности попадания, и т. п.

Математическая формулировка задачи. На основании двух серий испытаний $a_1, ..., a_i, ...$; $b_1, ..., b_i, ...$ требуется проверить гипотезу $p_1 > p_2$ против конкурирующей гипотезы $p_1 < p_2$, где p_1 и p_2 неизвестные вероятности успеха в каждой из серии испытаний. В результате i-го испытания фиксируется результат:

$$a_i(b_i) = \begin{cases} 1 — \text{в случае успеха}, \\ 0 — \text{в противном случае}. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

В данном последовательном критерии рассматриваются пары (a_i, b_i) такие, что $(a_i, b_i) = (1,0) \vee (0,1)$. Число пар $(1,0)$ обозначается t_1, число пар $(0,1)$ — t_2.

Относительное превосходство процесса 2 над процессом 1 измеряется отношением их показателей эффективности k_2 и k_1:

$$u = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\dfrac{p_2}{1-p_2}}{\dfrac{p_1}{1-p_1}} = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}. \tag{2.1.12}$$

Если $u=1$, процессы одинаковы, если $u>1$, то процесс 2 лучше, если $u<1$, то лучше процесс 1.

Для принятия решения о сравнительной оценке процессов выбираются два значения u_0 и u_1 $(u_0 < u_1)$ таких, что отказ от процесса 1 в пользу процесса 2 рассматривается как ошибка, имеющая практическое значение, когда истинное значение $u < u_0$, и сохранение процесса 1 рассматривается как ошибка, когда $u > u_1$. Если $u \in (u_0, u_1)$, то неважно, какое решение принято.

Величина допустимого риска определяется в следующей форме: вероятность отказа от процесса 1 не должна превышать выбранной величины α, когда $u < u_0$, и вероятность сохранения процесса 1 не должна превышать величины β, когда $u > u_1$.

Методика проведения последовательного критерия.

1) Рассчитываются значения $\frac{1-\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta}{1-\alpha}$, $\frac{1+u_1}{1-u_0}$.

2) Определяются значения приемочного (a_t) и браковочного (r_t) чисел:

$$\left.\begin{aligned} a_t &= \frac{\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln u_1 - \ln u_0} + t\,\frac{\ln\frac{1+u_1}{1-u_0}}{\ln u_1 - \ln u_0}; \\ r_t &= \frac{\ln\frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln u_1 - \ln u_0} + t\,\frac{\ln\frac{1+u_1}{1-u_0}}{\ln u_1 - \ln u_0}, \end{aligned}\right\} \quad (2.1.13)$$

где t — общее число наблюдаемых пар, соответствующее числу испытаний, $t=t_1+t_2$.

3) Проверяется условие $a_t<t_2<r_t$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{При } a_t < t_2 < r_t && \text{испытания продолжаются,} \\ &\text{при } t_2 < a_t && \text{принимается процесс 1,} \\ &\text{при } t_2 > r_t && \text{принимается процесс 2.} \end{aligned}\right\} \quad (2.1.14)$$

Способы реализации критерия.

Табличный способ. Составляется таблица, в которую до начала испытаний заносятся величины $t_1=1, 2, \ldots, a_t$ и r_t, а в процессе испытаний — результат наблюдений (a_i, b_i) и подсчитываемое значение t_2. Решение принимается в соответствии с (2.1.14).

Графический способ. На графике, где по оси абсцисс откладывается число t, а по оси ординат — число t_2, строится зона решений, определяемая линиями L_1 и L_0. Общий угловой коэффициент этих линий равен

$$s = \frac{\ln\frac{1+u_1}{1+u_0}}{\ln u_1 - \ln u_0}. \quad (2.1.15)$$

а параметры h_0 и h_1 равны соответственно для L_0 и L_1:

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln u_1 - \ln u_0}; \\ h_1 &= \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln u_1 - \ln u_0}. \end{aligned}\right\} \quad (2.1.16)$$

Область выше $L_1 - R_t'$ определяет область предпочтения процессу 2, ниже линии $L_0 - R_t^0$ — процессу 1, между линиями L_0, $L_1 - R_t$ — область безразличия.

В процессе испытаний на график наносятся точки (t, t_2).

При $(t, t_2) \in R_t$ испытания продолжаются,

при $(t, t_2) \in R_t'$ процесс 2 эффективнее,

при $(t, t_2) \in R_t^0$ процесс 1 эффективнее.

Оперативная характеристика $L(u)$ определяется вероятностью того, что процесс 1 окажется эффективнее процесса 2 для любого значения $u = \frac{k_2}{k_1}$.

Кривая $L(u)$ строится по пяти значениям u.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Для } u = \infty \qquad L(\infty) = 0; \\ &\text{для } u = -u_1 \qquad L(-u_1) = \beta; \\ &\text{для } u = \frac{\ln \frac{1+u_1}{1+u_0}}{\ln \frac{u_1(1+u_0)}{u_0(1+u_1)}} \\ &L(u) = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{1-\beta}{\alpha} - \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}; \\ &\text{для } u = u_0 \qquad L(u_0) = 1 - \alpha; \\ &\text{для } u = 0 \qquad L(0) = 1. \end{aligned}\right\} \quad (2.1.17)$$

Функция среднего числа наблюдений критерия $E_u(t)$ строится по следующим пяти значениям u:

Для $u = 0$

$$E_0(t) = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{1+u_1}{1+u_0}};$$

для $u = u_0$

$$E_{u_0}(t) = \frac{(1-\alpha)\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\frac{u_0}{1+u_0}\ln \frac{u_1(1+u_0)}{u_0(1+u_1)} + \frac{1}{1+u_0}\ln \frac{1+u_0}{1+u_1}};$$

для $u = u_1$

$$E_{u_1}(t) = \frac{\beta \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\frac{u_1}{1+u_1}\ln \frac{u_1(1+u_0)}{u_0(1+u_1)} + \frac{1}{1+u_1}\ln \frac{1+u_0}{1+u_1}}; \qquad (2.1.18)$$

для $u = \frac{s}{1-s}$

$$E_{\frac{s}{1-s}}(t) = \frac{-\left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\left(\ln \frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\ln \frac{u_1(1+u_0)}{u_0(1+u_1)} \ln \frac{1+u_1}{1+u_0}};$$

для $u = \infty$

$$E_\infty(t) = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{u_1(1+u_0)}{u_0(1+u_1)}}.$$

Здесь s угловой коэффициент, определяемый по формуле (2.1.15).

Пример 2.1.2. Сравнить две радиолокационные станции РЛС-I и РЛС-II. Вероятности обнаружения заданного объекта каждой из них p_1 и p_2 неизвестны. Оценку произвести на основании экспе-

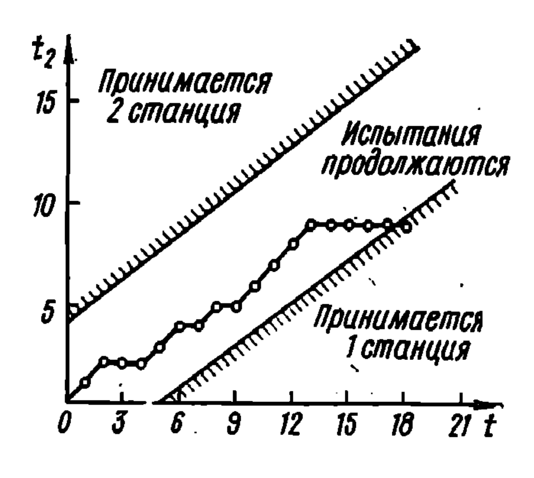


Рис. 2.1.4

римента, проводимого в одинаковых условиях для РЛС-I и РЛС-II по критерию:

$$u = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}.$$

При этом отказ от РЛС-I ради РЛС-II считается ошибкой, имеющей практическое значение, когда истинное значение $u < u_0 = 1{,}3$, и принятие РЛС-I считается ошибкой, когда $u > u_1 = 3$. Заданная величина риска определяется числами $\alpha = 0{,}03$ и $\beta = 0{,}10$. Последовательный анализ произвести графически.

Решение. а) По формулам (2.1.15) и (2.1.16) рассчитываются $s = 0{,}756$, $h_0 = -3{,}7$ и $h_1 = 4{,}0$ и строится зона решений (рис. 2.1.4).

б) Проводится эксперимент. После каждого эксперимента t (общее число наблюдаемых пар) определяется t_2 [число пар (0,1) V (1,0)].

в) Точки (t, t_2) последовательно после каждого эксперимента наносятся на график (рис. 2.1.4). Анализируется местоположение очередной точки.

г) При $t = 18$ и $t_2 = 9$ точка (t, t_2) оказалась в зоне приемки РЛС-I. Таким образом, можно считать, что РЛС-I эффективнее РЛС-II.

2.1.4. Оценка качества системы по среднему значению выбранного параметра

При оценке качества испытываемой системы, типа оружия или устройства, уровня боевой подготовки личного состава или отрабатываемого тактического приема, а также при приемочном контроле продукции и т. п. возникает задача оценки их эффективности по среднему значению выбранного параметра рассматриваемого процесса, считая, что распределение этого параметра (x) подчинено нормальному закону с известной дисперсией σ^2 (1-я задача) или закону Пуассона с неизвестным математическим ожиданием (2-я задача).

Математическая формулировка 1-й задачи.

Имеется случайная величина x, распределенная по нормальному закону с плотностью вероятности

$$f(x;\ \theta,\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.1.19)$$

где θ — неизвестное математическое ожидание;
σ^2 — известная дисперсия.

Требуется проверить гипотезу H_0, что $\theta<\theta'$, если θ' задано.

Зона предпочтительного принятия состоит из всех θ, для которых $\theta \leqslant \theta_0$, зона предпочтительного отказа включает все θ, для которых $\theta \geqslant \theta_1$, и зона безразличия состоит из всех значений θ между θ_0 и θ_1. При этом вероятность браковки партии не должна превышать α, когда $\theta \leqslant \theta_0$, а вероятность ее принятия не должна превышать величины β, когда $\theta \geqslant \theta_1$. Допускаемый риск характеризуется числами θ_0, θ_1, α и β.

Последовательный критерий, удовлетворяющий требованиям допустимого риска, является критерием проверки гипотезы H_0 $(\theta=\theta_0)$ против конкурирующей гипотезы H_1 $(\theta=\theta_1)$.

Методика проведения последовательного критерия.

1) Рассчитываются значения

$$\frac{1-\beta}{\alpha},\ \frac{\beta}{1-\alpha},\ \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0},\ \frac{\theta_0+\theta_1}{2}.$$

2) Определяются приемочное (a_m) и браковочное (r_m) числа:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m\,\frac{\theta_0 + \theta_1}{2};\\ r_m &= \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m\,\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (2.1.20)$$

3) На m-м испытании формируется сумма $\sum_{i=1}^{m} x_i = X_m$ и проверяется условие $a_m < X_m < r_m$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Если } a_m < X_m < r_m \text{ — испытания продолжаются;}\\ &\text{если } X_m < a_m \text{ — принимается гипотеза } H_0;\\ &\text{если } X_m > r_m \text{ — принимается гипотеза } H_1. \end{aligned}\right\} (2.1.21)$$

Способы реализации критерия.

Табличный способ. Составляется таблица, в которую до начала испытаний заносятся величины $m=1, 2, \ldots, a_m$ и r_m, а в процессе испытаний — величины x_i и X_m. Решение принимается в соответствии с (2.1.21).

Графический способ. На графике, где по оси абсцисс откладывается число m, а по оси ординат — X_m, строится зона решений, определяемая линиями L_1 и L_0. Угловой коэффициент этих линий равен

$$s = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}, \quad (2.1.22)$$

а параметры h_0 и h_1 равны соответственно для L_0 и L_1:

$$h_0 = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{\beta}{1-\alpha}; \quad h_1 = \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (2.1.23)$$

Область выше линии $L_1 — R'_m$ определяет область принятия гипотезы H_1, ниже линии $L_0 — R^0_m$ — область принятия гипотезы H_0, между линиями L_0 и $L_1 — R_m$ — область безразличия.

В процессе испытаний на график наносятся точки (m, X_m).

$$\left.\begin{array}{l}\text{При } (m, X_m) \in R'_m \text{ принимается гипотеза } H_1,\\ \text{при } (m, X_m) \in R^{*}_m \text{ гипотеза } H_0,\\ \text{при } (m, X_m) \in R_m \text{ испытания продолжаются.}\end{array}\right\} \qquad (2.1.24)$$

Оперативная характеристика критерия $L(\theta)$ строится по пяти значениям θ: $\theta = -\infty$, θ_0, $\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$, θ_1, $+\infty$. При этом

$$\left.\begin{array}{l} L(-\infty) = 1;\ L(\theta_0) = 1 - \alpha;\\ L\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) = \dfrac{\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha} - \ln \dfrac{\beta}{1-\alpha}};\\ L(\theta_1) = \beta;\quad L(+\infty) = 0. \end{array}\right\} \qquad (2.1.25)$$

Функция среднего числа наблюдений $E_\theta(n)$ определяется по формуле

$$E_\theta(n) = \frac{h_1 + L(\theta)(h_0 - h_1)}{\theta - s}, \qquad (2.1.26)$$

при $\theta = s$ — по формуле

$$E_s(n) = -\frac{h_0 h_1}{\sigma^2}. \qquad (2.1.27)$$

Пример 2.1.3. В заданных гидрологических условиях проверить соответствие нового гидроакустического комплекса следующим техническим условиям: математическое ожидание дальности обнаружения x плавающего предмета, находящегося на расстоянии $x_1 \approx 140 \div 145$ каб, должно быть в пределах $x_0 = 135$ каб и $x_1 = 150$ каб. При этом вероятность браковки комплекса не должна превышать $\alpha = 0{,}01$, когда $\bar{x} < x_0$, а вероятность принятия комплекса не должна превышать величины $\beta = 0{,}03$, когда $\bar{x} > x_1$. Последовательный анализ провести графически.

Считается, что дальность обнаружения x распределена по нормальному закону с неизвестным средним значением $\bar{x}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 25$ каб.

Решение. а) По формулам (2.1.22) и (2.1.23) рассчитываются $s = 142,5$; $h_0 = -319$ и $h_1 = 249$ и строится зона решений (рис. 2.1.5).

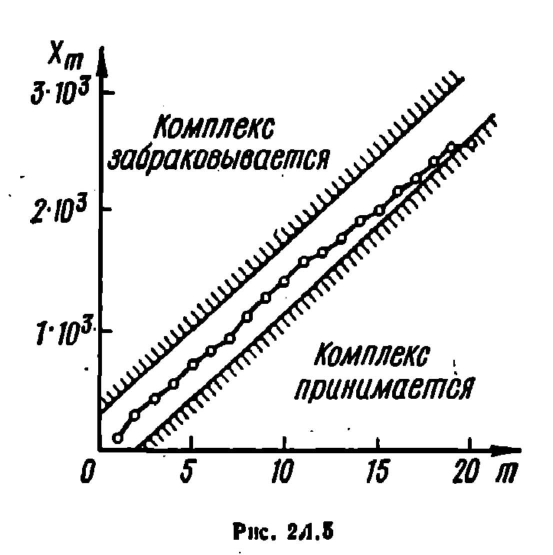


Рис. 2.1.5

б) Проводится эксперимент. Фиксируется x_l. После каждого m вычисляется $X_m = \sum_{l=1}^{m} x_l$.

в) Точки (m, X_m) последовательно после каждого эксперимента наносятся на график (рис. 2.1.5). Анализируется местоположение очередной точки.

г) При $m = 21$, $X_m = 2040$ точка (m, X_m) оказалась в зоне приемки комплекса.

Таким образом, проверка показала, что комплекс удовлетворяет заданным техническим условиям.

Математическая формулировка 2-й задачи.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots$ значения, принимаемые случайной величиной x, распределенной по закону Пуассона с одним и тем же неизвестным средним θ:

$$f(x; \theta) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}. \qquad (2.1.28)$$

Проверяемая гипотеза H_0 состоит в том, что $\theta=\theta_0$, а альтернативная H_1 в том, что $\theta=\theta_1$. Для определенности $\theta_0<\theta_1$. Таким образом, для $\theta\leqslant\theta_0$ практически важно, чтобы проверяемая партия (тактический прием) была принята, а при $\theta>\theta_1$ — отвергнута, хотя возможна и обратная постановка задачи.

Допускаемый риск характеризуется числами θ_0, θ_1, α и β.

Методика проведения последовательного критерия и способы его реализации аналогичны 1-й задаче. Различие заключается лишь в формулах определения приемочного (a_m) и браковочного (r_m) чисел:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{\ln\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\ln\theta_1-\ln\theta_0}+\frac{m(\theta_1-\theta_0)}{\ln\theta_1-\ln\theta_0};\\ r_m &= \frac{\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\ln\theta_1-\ln\theta_0}+\frac{m(\theta_1-\theta_0)}{\ln\theta_1-\ln\theta_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.29)$$

Соответственно имеют другие формульные выражения угловой коэффициент (s) и параметры (h_0, h_1) линий решения L_0 и L_1, а именно:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{\theta_1-\theta_0}{\ln\theta_1-\ln\theta_0};\\ h_0 &= \frac{\ln\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\ln\theta_1-\ln\theta_0};\\ h_1 &= \frac{\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\ln\theta_1-\ln\theta_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.30)$$

Оперативная характеристика $L(\theta)$ наиболее просто строится по четырем значениям θ: $\theta=-\infty$, θ_0, θ_1 и $\theta=+\infty$. При этом $L(-\infty)=1$; $L(\theta_0)=1-\alpha$; $L(\theta_1)=\beta$ и $L(+\infty)=0$.

Функция среднего числа наблюдений $E_\theta(n)$ определяется по формуле

$$E_\theta(n) \approx \frac{L(\theta)\ln\frac{\beta}{1-\alpha} + \left[1 - L(\theta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha}\right]}{E_\theta(z)}, \quad (2.1.31)$$

где $E_\theta(z) = \theta \ln \frac{\theta_1}{\theta_2} + (\theta_0 - \theta_1)$.

Пример 2.1.4. Методом математического моделирования определить эффективность двух тактических приемов (I и II) поиска подводной лодки силами ПЛО, считая, что число обнаружений подчиняется закону Пуассона с параметром θ. Тактический прием считается эффективным, если среднее число обнаружений (θ) в заданный интервал времени больше двух. Пусть с вероятностью $\alpha < 0{,}02$ допустимо принятие решения о том, что прием целесообразен, хотя $\theta < 2$ $(\theta_0 = 1)$, а с вероятностью $\beta < 0{,}05$ — что прием нецелесообразен, хотя $\theta > 2$ $(\theta_1 = 3)$. Таким образом, требуется проверить целесообразность тактических приемов при допускаемом риске: $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 3$, $\alpha = 0{,}02$ и $\beta = 0{,}05$. Проверку произвести табличным способом.

Решение. 1. По формулам (2.1.29) рассчитываются значения a_m и r_m и заносятся в табл. 2.1.2.

2. Проводится моделирование каждого из тактических приемов. В каждом эксперименте подсчитывается количество обнаружений подводной лодки и определяются числа X_m^{I} и X_m^{II} по формуле

$$X_m = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Результаты заносятся в табл. 2.1.2.

3. Моделирование I тактического приема заканчивается на 5-м эксперименте, так как $X_m^{I} < r_m$ $(5 < 5{,}6)$, т. е. I прием оказался неэффективным.

Моделирование II тактического приема окончилось на 6-м эксперименте, и его следует признать эффективным, так как $X_m^{II} > a_m$ $(14 > 13{,}8)$.

Таблица 2.1.2

m	a_m	X_m^{I}	X_m^{II}	r_m
1	5,3	0	3	
2	7,0	2	5	0,5
3	8,6	3	8	2,3
4	10,4	4	10	3,9
5	12,0	[5]	10	5,6
6	13,8		[14]	7,5

2.1.5. Оценка качества системы вооружения по дисперсии выбранного параметра

Подобная задача возникает в тех случаях, когда процессы, аналогичные указанным в разделе 2.1.4, необходимо оценивать по среднему квадратическому отклонению σ выбранного параметра x (известного или неизвестного) от его среднего значения θ. Так, если качество продукции (процесса) считается тем выше, чем меньше σ, то можно определить такую величину σ', что изделие будет считаться нестандартным, если $\sigma > \sigma'$, и удовлетворительным (отвечающим техническим требованиям), если $\sigma < \sigma'$. Так как σ неизвестно, то задача состоит в определении способа проверки гипотезы, что $\sigma < \sigma'$.

Математическая формулировка задачи. Имеется случайная величина x, распределенная с плотностью вероятности

$$f(x;\ \theta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right]. \quad (2.1.32)$$

где θ — задано, а σ — неизвестно.

Требуется проверить гипотезу о том, что $\sigma < \sigma'$ (σ' — задано), при условии, что вероятность классифицировать исследуемую партию изделий как неудовлетворительную не должна превышать величины α, когда $\sigma < \sigma_0$, а вероятность признать партию доброкачественной не должна превышать заданной величины β, когда $\sigma > \sigma_1$. Допускаемый риск определяется числами σ_0, σ_1, α и β.

Последовательный критерий, удовлетворяющий требованиям величины допустимого риска, является критерием силы (α, β) для проверки нулевой гипотезы H_0 ($\sigma=\sigma_0$) при конкурирующей гипотезе H_1 ($\sigma=\sigma_1$).

Методика проведения последовательного критерия.

1) Рассчитываются значения

$$\frac{1-\beta}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad \frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}, \quad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}.$$

2) Определяются приемочное a_m и браковочное r_m числа:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{2\ln\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}-\dfrac{1}{\sigma_1^2}} + m\frac{\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}-\dfrac{1}{\sigma_1^2}} \\ &\text{и} \\ r_m &= \frac{2\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}-\dfrac{1}{\sigma_1^2}} + m\frac{\ln\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}-\dfrac{1}{\sigma_1^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (2.1.33)$$

3) На m-м испытании вычисляется сумма

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-\theta)^2=\sum\nolimits_m$$

проверяется условие $a_m<\sum_m<r_m$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Если } a_m<\textstyle\sum_m<r_m \text{ — испытания продолжаются.} \\ &\text{если } \textstyle\sum_m \leqslant a_m \text{ — принимается гипотеза } H_0, \\ &\text{если } \textstyle\sum_m > r_m \text{ — принимается гипотеза } H_1. \end{aligned}\right\} \quad (2.1.34)$$

Способы реализации критерия.

Табличный способ. Составляется таблица, в которую до начала испытаний заносятся величины $m=1, 2, \ldots, a_m$ и r_m, а в процессе испытаний — величины x_i и $\sum_{i=1}^{m}(x_i - \theta)^2$. Решение принимается в соответствии с (2.1.34).

Графический способ. На графике, где по оси абсцисс откладывается число m, а по оси ординат — Σ_m, строится зона решений, определяемая линиями L_0 и L_1. Их угловой коэффициент равен

$$s = \frac{\ln\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}, \quad (2.1.35)$$

а параметры h_0 и h_1 равны соответственно для L_0 и L_1:

$$h_0 = \frac{2\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}; \quad h_1 = \frac{2\ln\frac{1-\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}. \quad (2.1.36)$$

Область выше линии $L_1 - R'_m$ определяет область отклонения партии (гипотезы H_0), ниже линии $L_0 - R^0_m$ — область принятия партии (гипотезы H_0), между линиями L_0 и $L_1 - R_m$ — область безразличия. В процессе испытаний на график наносятся точки $\left(m, \sum_m\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{При } \left(m, \sum_m\right) \in R_m \text{ испытания продолжаются,} \\ \text{при } \left(m, \sum_m\right) \in R^{\circ}_m \text{ принимается гипотеза } H_0, \\ \text{при } \left(m, \sum_m\right) \in R'_m \text{ принимается гипотеза } H_1. \end{array}\right| \quad (2.1.37)$$

Оперативная характеристика критерия $L(\sigma)$ строится по пяти значениям σ: $\sigma=0$; σ_0; $\sqrt{s}$; σ_1; $+\infty$. При этом

$$L(0)=1;\quad L(\sigma_0)=1-\alpha;\quad L(\sqrt{s})=\frac{h_1}{h_1-h_0};$$

$$L(\sigma_1)=\beta;\quad L(+\infty)=0. \qquad (2.1.38)$$

Функция среднего числа наблюдений критерия $\mathrm{E}_\sigma(n)$ определяется по формуле

$$\mathrm{E}_\sigma(n)=\frac{L(\sigma)(h_0-h_1)+h_1}{\sigma^2-s}, \qquad (2.1.39)$$

для $\sigma=\sqrt{s}$

$$\mathrm{E}_{\sqrt{s}}(n)=-\frac{h_0h_1}{2\sigma^2}. \qquad (2.1.40)$$

Формулы получены в предположении, что среднее значение случайной величины $x-\theta$ известно. В случае когда оно неизвестно, все формулы остаются неизменными, но в процессе исследований величинам θ, a_m и r_m нужно присваивать следующие значения:

$$\theta:=\bar{x}=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}x_l;\quad a_m:=a_{m-1};\quad r_m:=r_{m-1}.$$

При этом формула для $L(\sigma)$ остается неизменной, а значение $\mathrm{E}_\sigma(n)$ становится на 1 больше, чем при известном θ.

Пример 2.1.5. Проверить, удовлетворяет ли принимаемая партия ракет технико-тактическим условиям в отношении рассеивания по дальности (σ), определяемым следующими предельными значениями средних квадратических отклонений и допустимыми ошибками: $\sigma_0=1$ каб; $\sigma_1=2$ каб; $\alpha=\beta=0{,}05$.

Решение. а) По формулам (2.1.35) и (2.1.36) рассчитываются $s=1{,}39$; $h_0=1{,}89$ каб^2 и $h_1=1{,}89$ каб^2 и строится зона решений (рис. 2.1.6).

б) Проводятся испытания (стрельба ракетами). После каждого пуска ($m=1, 2 \ldots$) рассчитывается:

$$\Sigma_m=\sum_{l=1}^{m}(x_l-\bar{x})^2.$$

m	1	2	3	4	5	6	7
$(x_i - \bar{x})$	0,6	1,1	0,8	1,4	1,6	0,5	0,2
$\sum_m$	0,36	1,57	2,21	4,17	6,73	6,98	7,02

в) Точки $\left(m, \sum_m\right)$ последовательно после каждого испытания наносятся на график (рис. 2.1.6). Анализируется местоположение очередной точки.

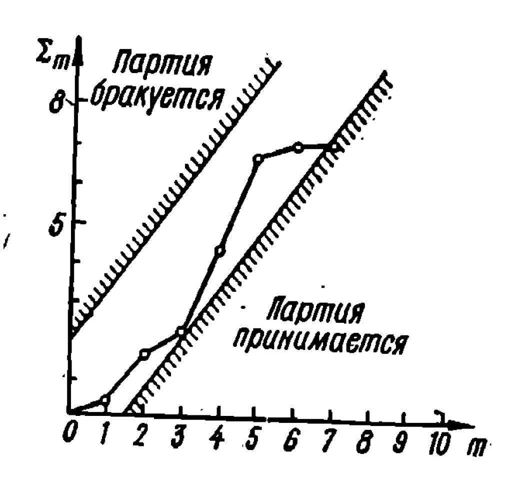


Рис. 2.1.6

г) При $m = 7$, $\sum_m = 7{,}02$ каб² точка $\left(m, \sum_m\right)$ оказалась в зоне приемки. Таким образом, партия ракет принимается, так как проверка методом последовательного анализа показала, что она удовлетворяет тактико-техническим условиям.

2.2. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

2.2.1. Общие сведения

Метод статистических испытаний заключается в воспроизведении исследуемого физического процесса при помощи вероятностной математической модели и вычислении

характеристик этого процесса. Основан метод на многократном проведении испытаний построенной модели с последующей статистической обработкой полученных данных с целью определения характеристик рассматриваемого процесса в виде статистических оценок его параметров. Величина рассеяния этих параметров определяет степень приближения решения задачи в вероятностном смысле.

Для исследования операций практический интерес представляют лишь такие вероятностные модели, которые допускают их реализацию на электронно-цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ).

Метод статистических испытаний (называемый также методом Монте-Карло) в исследовании операций целесообразно применять в следующих случаях:

— когда исследуется система, функционирование которой определяется многими вероятностными параметрами элементарных явлений;

— когда построение чисто аналитической вероятностной модели такой системы затруднено. При этом затруднение может быть как из-за сложности построения математической модели функционирования системы, так и из-за трудностей получения окончательной аналитической зависимости (композиции законов распределения случайных величин, определяющих то или иное элементарное явление рассматриваемого процесса).

Базируется метод на использовании *случайных чисел* — возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей.

В методе статистических испытаний с изменением хотя бы одного исходного параметра задачи необходимо заново производить серию испытаний для получения достаточно надежных оценок искомых параметров.

Применение метода статистических испытаний в задачах исследования операций основано на формировании случайных чисел и их последовательностей в следующих вероятностных схемах:

— моделирование независимых и зависимых испытаний в схеме случайных событий;

— получение случайных чисел с заданным законом распределения.

Получение случайных чисел в любой из вероятностных схем базируется на построении в ЭЦВМ последовательности равномерно распределенных чисел.

2.2.2. Получение равномерно распределенных случайных чисел

Основным способом получения в ЭЦВМ равномерно распределенных случайных чисел является программный способ с помощью рекуррентного соотношения, называемый *алгоритмическим*, а сами случайные числа — *псевдослучайными* (или *квазислучайными*), поскольку они находятся с помощью детерминированного математического выражения.

Последовательность равномерно распределенных псевдослучайных чисел должна удовлетворять следующим основным требованиям:

а) выборочная совокупность случайных чисел должна отвечать критериям проверки «случайности», а распределение этих чисел должно несущественно отклоняться от равномерного;

б) количество операций, идущее на получение одного псевдослучайного числа, не должно быть слишком большим;

в) в процессе работы программы распределение этих чисел и степень их коррелированности не должны меняться.

Псевдослучайные числа могут быть получены многими способами. Наиболее практичен из них следующий рекуррентный метод:

а) в ячейку a накопителя ЭЦВМ засылается любое случайное число a_j;

б) осуществляется нормализация числа a_j;

в) нормализованное число a_j в ячейке a сдвигается на семь разрядов влево; результат посылается в ячейку b;

г) производится специальное сложение содержимых ячейки b (первое слагаемое) и ячейки a (второе слагаемое); результат посылается в ячейку a;

д) берется модуль числа ячейки a.

Результат и есть псевдослучайное число a_{j+1}. Число a_{j+1} является равномерно распределенным случайным числом в интервале [0,1]. В дальнейшем оно будет всегда обозначаться ξ_p.

Случайная величина Z_p $(a; b)$, равномерно распределенная в интервале $[a, b]$, определяется по формуле

$$Z_p(a, b) = (b - a)\,\xi_p + a. \qquad (2.2.1)$$

Замечание. 1. Команда специального сложения осуществляет логическое поразрядное сложение содержимого первого и второго адресов с сохранением порядка первого слагаемого.

2. Если качество полученной последовательности псевдослучайных чисел не проверяется, то периодически, через каждые m последовательно образованных случайных чисел, надо производить случайное «возмущение» разрядов в разрядной сетке псевдослучайного числа. Это достигается засылкой в ячейку, где образуются псевдослучайные числа, содержимого какой-либо рабочей ячейки или контрольной суммы накопителя на данном этапе вычислений.

В этом случае средняя длина периода, на протяжении которого выдерживаются требования «случайности» и равномерности, увеличивается $\sqrt{m}$ раз.

2.2.3. Моделирование случайных событий

Моделирование одиночного события.

Моделирование одиночного события A, наступающего с вероятностью p, определяется как событие, состоящее в том, что выбранное значение ξ_p случайной величины $\xi \in [0,1]$ удовлетворяет неравенству $\xi_p < p$. В дальнейшем примем, что

$$A = \begin{cases} 1 \text{ — если } A \text{ произошло}, \\ 0 \text{ — если } A \text{ не произошло}. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Тогда

$$A = \begin{cases} 1 \text{ — при } \xi_p < p, \\ 0 \text{ — при } \xi_p > p. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Моделирование полной группы событий.

Моделирование полной группы несовместных событий A_m, $m=1, 2, \ldots, s$, наступающих с вероятностями $P(A_m) = p_m$, $m=1, 2, \ldots, s$ $\left(\sum_{m=1}^{s} p_m = 1\right)$, определяется как событие, состоящее в том, что выбранное значение ξ_{pj} случайной величины $\xi \in [0,1]$ удовлетворяет неравенству

$$l_{m-1} < \xi_{pj} < l_m. \tag{2.2.4}$$

где величины $l_m = \sum_{l=1}^{m} p_l$, $m = 0, 1, 2, \ldots, s$ представляют собой границы интервалов, определяемых как

$$p_m = \sum_{l=1}^{m} p_l - \sum_{l=1}^{m-1} p_{l-1}.$$

Процедура моделирования испытаний рассматриваемого вида состоит в последовательном выборе значений ξ_{pj} и сравнении их с величинами l_m. Исходом испытания явится событие A_m, соответствующее номеру m-го интервала, в который попало число ξ_{pj}. Таким образом

$$A_m = \begin{cases} 1 \text{ — для } m^*, \text{ удовлетворяющего (2.2.4), начиная} \\ \quad \text{с } m=1; \\ 0 \text{ — для } m<m^*. \end{cases}$$

Пример 2.2.1. Результатом торпедной стрельбы по кораблю противника может быть одно из трех событий ($s=3$): поражающее попадание (A_1), непоражающее попадание (A_2) и промах (A_3), вероятности которых соответственно равны $p_1=0{,}28$, $p_2=0{,}20$, $p_3=0{,}52$ $\left(\sum p_l = 1\right)$. Определить результат моделирования торпедной стрельбы.

Решение. а) Рассчитываем границы интервалов l_m, соответствующие событиям A_m, $m = 1, 2, 3$; $l_0 = 0$; $l_1 = 0{,}28$, $l_2 = 0{,}48$, $l_3 = 1{,}0$.

б) Выбираем ξ_p. Пусть $\xi_p = 0{,}223$. Анализ показывает, что число ξ_p попало в 1-й интервал, т. е. $\xi_p \in [l_0, l_1]$. Следовательно, в данном опыте моделирование торпедной стрельбы имело своим исходом поражение корабля противника — произошло событие A_1.

Моделирование сложных событий.

1) Независимые события. Пусть события A и B имеют вероятности P_A и P_B, тогда возможным исходом их совместных испытаний будут события Q_l с вероятностями p_l, $l=1, 2, 3, 4$ $(\Sigma p_l = 1)$.

Реализация события Q_l допускает два варианта:

а) Последовательная проверка условия $\xi_{p_l} < P_A$ и $\xi_{p_l} < P_B$ согласно (2.2.3).

б) Определение m^*-го исхода события Q_l, приведенного в табл. 2.2.1, согласно (2.2.4).

Таблица 2.2.1

i	1	2	3	4
Q_i	AB	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	$\bar{A}\,\bar{B}$
p_i	$P_A P_B$	$(1-P_A)$	$P_A(1-P_B)$	$(1-P_A)(1-P_B)$

Таблица 2.2.2

i	1	2	3	4
Q_i	AB	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	$\bar{A}\,\bar{B}$
p_i	$P_A[1-P(B/A)]$	$(1-P_A)P(B/A)$	$P_A[1-P(B/A)]$	$(1-P_A)[1-P(B/\bar{A})]$

Первый вариант требует выборки двух случайных чисел ξ_{p_i} и двух сравнений ($\xi_{p_i} < p$), второй вариант — одного числа ξ_p, но число сравнений в общем случае больше. В среднем первый вариант экономичнее.

2) Зависимые события. Пусть события A и B имеют вероятности P_A и P_B; вероятность события B при условии, что произошло событие A, равна $P(B/A)$. Тогда возможным исходом их совместных испытаний будут события Q_i с вероятностями p_i, $i = 1, 2, 3, 4$ $\left(\sum_i p_i = 1\right)$.

Реализация события Q_i допускает два варианта:

— последовательная проверка в соответствии с алгоритмом, приведенным на рис. 2.2.1;

— определение m^*-го исхода событий Q_i, приведенного в табл. 2.2.2, согласно формуле (2.2.4).

Здесь
$$P(B/\bar{A}) = \frac{P_B - P_A P(B/A)}{1 - P_A}. \qquad (2.2.6)$$

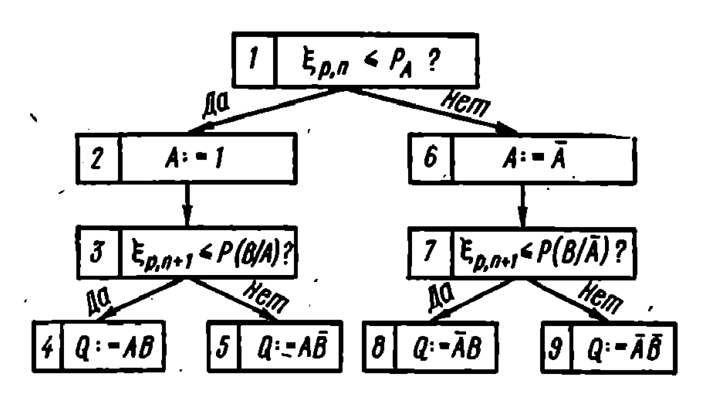


Рис. 2.2.1

Моделирование дискретной случайной величины, характеризуемой законом распределения $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, осуществляется по схеме полной группы событий (формула 2.2.4), если каждому из возможных значений случайной величины x_i поставить одно из этих событий A_i, происходящих с вероятностью p_i.

Пример 2.2.2. Определить результат нанесения удара подводными лодками по соединению, состоящему из двух ударных кораблей ($M=2$) и четырех кораблей охранения ($L=4$). Возможный исход удара представляет систему двух дискретных случайных величин X и Y, приводящих к 15 различным исходам удара, вероятности которых $p_{m,l}=P\{X=m, Y=l\}$ приведены в табл. 2.2.3.

Таблица 2.2.3

m \ l	0	1	2	3	4	$P\{X=m\}$
0	0,05	0,12	0,18	0,06	0,03	0,44
1	0,03	0,11	0,13	0,04	0,02	0,33
2	0,02	0,07	0,09	0,03	0,02	0,23
$P\{Y=l\}$	0,10	0,30	0,40	0,13	0,07	1,00

Решение. а) Рассчитаем законы распределения числа уничтоженных ударных кораблей $P\{X=m\}$, $m=0, 1, 2$ и кораблей охранения $P\{Y=l\}$, $l=0, 1, 2, 3, 4$ по формулам:

$$P\{X=m\}=\sum_{l} P\{X=m, Y=l\};$$

$$P\{Y=l\}=\sum_{m} P\{X=m, Y=l\}.$$

Полученные значения занесем в табл. 2.2.3 в последний столбец и последнюю строку.

б) Рассчитаем по формуле

$$P\{X=m/Y=l\}=\frac{P\{X=m, Y=l\}}{P\{Y=l\}}$$

условные вероятности $P\{X=m/Y=l\}$ и занесем их в табл. 2.2.4.

Таблица 2.2.4

m \ l	0	1	2	3
0	0,500	0,400	0,461	0,438
1	0,300	0,366	0,308	0,286
2	0,200	0,234	0,231	0,286
	1,000	1,000	1,000	1,000

Случайные величины X и Y в данном случае зависимы, так как $P\{X=m/Y=l\} \neq P\{X=m\}$.

в) Моделируем исход удара по соединению кораблей: выбираем два случайных числа ξ_{p1} (для ударных кораблей) и ξ_{p2} (для кораблей охранения). Пусть $\xi_{p1}=0{,}837$ и $\xi_{p2}=0{,}162$.

г) Так как события зависимы, то сначала определяем число уничтоженных кораблей охранения l_0, соответствующих ξ_{p_2}. Для этого с помощью ряда распределения $P\{Y=l\}$ составляем неравенства (2.2.4) для каждого l:

$l=0$	$0<\xi_{p_2}<0{,}10$	$l=3$	$0{,}80<\xi_{p_2}<0{,}93$
$l=1$	$0{,}10<\xi_{p_2}<0{,}40$	$l=4$	$0{,}93<\xi_{p_2}<1$
$l=2$	$0{,}40<\xi_{p_2}<0{,}80$		

По формуле (2.2.4) для $\xi_{p_2}=0{,}162$ находим $l_0=1$.

д) Определяем число уничтоженных ударных кораблей — m_0, соответствующих ξ_{p1}, при условии, что $l_0=1$. Аналогично п. «г» по ряду $P\{X=m/Y=1\}$ составляем неравенства для m:

$$m=0,\quad 0<\xi_{p1}<0{,}400;$$

$$m=1,\quad 0{,}400<\xi_{p1}<0{,}766;$$

$$m=2,\quad 0{,}766<\xi_{p1}<1{,}000.$$

По формуле (2.2.4) для $\xi_{pl} = 0{,}837$ находим $m_0 = 2$.

Итак, моделирование удара по соединению кораблей привело в данном опыте к исходу ($m_0 = 2$, $l_0 = 1$), априорная вероятность которого (см. табл. 2.2.3) равна 0,07.

2.2.4. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

При моделировании случайных величин с заданным законом распределения используется в основном метод Неймана (или модифицированный метод Неймана-Голенко), а также метод замены переменных (обратных функций). Однако указанные методы не позволяют получить любые распределения за сравнительно небольшое количество операций машины. Поэтому применяются приближенные способы преобразования случайных чисел ξ_p, равномерно распределенных в интервале 0,1. Такие преобразования осуществляются:

— с помощью кусочной аппроксимации законов распределения;

— с помощью отбора случайных чисел ξ_{pi} из множества $\{\xi_p\}$ таких, которые удовлетворяли бы заданному распределению;

— по методу суперпозиций;

— на основании предельных теорем вероятностей.

Формулы получения случайных чисел для основных распределений (непрерывных и дискретных) даны в табл. 2.2.5 и 2.2.6.

Использование того или другого распределения при моделировании случайных величин в задачах исследования операций определяется физической сущностью рассматриваемого явления.

2.2.5. Определение характеристик моделируемого процесса

Результаты наблюдений случайных величин каждого из r параметров моделируемого процесса $x_1, x_2, \ldots, x_r$ после проведения n реализаций модели образуют эмпирическое распределение.

Обработка на ЭЦВМ этих результатов позволяет получить уже в процессе моделирования численные характеристики эмпирического распределения, называемые *статистическими оценками* искомых параметров. К таким основным статистическим оценкам относятся:

— вероятность появления события (непрерывного или дискретного) — p;

— математическое ожидание случайной величины — $\bar{x}$;

— дисперсия s^2 или среднее квадратическое отклонение s;

— асимметрия S_k и эксцесс E_x распределения;

— корреляционный момент двух случайных величин X и Y — K_{xy}.

Этих оценок практически достаточно, чтобы построить необходимые законы распределения искомых случайных величин.

Для построения гистограммы эмпирического распределения в ЭЦВМ рассчитывается *относительная частота (частость)* случайной величины по формуле

$$\overline{p_i} = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (2.2.7)$$

где m — выбранное число интервалов (разрядов) диапазона изменения случайной величины x;

n_i — число наблюдений случайной величины x, попавших в i-й разряд;

n — общее число наблюдений (реализаций модели).

Формула (2.2.7) применима как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. При равенстве всех разрядов гистограмма строится непосредственно по данным об относительной частоте. В противном случае она строится по относительной плотности p_i':

$$p_i' = \frac{n_i}{nh_i}, \qquad (2.2.8)$$

где h_i — величина i-го разряда.

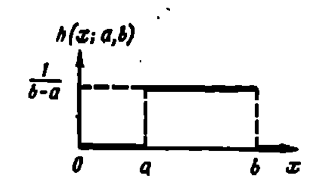
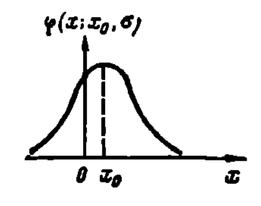
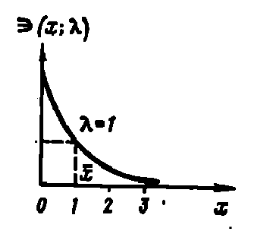
Если дискретность существенна, то частость каждого возможного значения случайной величины x может быть представлена графически в виде отрезков прямых, параллельных оси ординат.

Получение непрерывных случайны

Наименование распределения	Плотность распределения
Равномерное	$h(x;\ a,\ b)=\begin{cases}0 \text{ при } x<a;\\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a\leqslant x\leqslant b;\\ 0 \text{ при } x>b\end{cases}$
Нормальное	$\varphi(x;\ x_0,\ \sigma)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$, $-\infty<x<+\infty$, $\sigma>0$
Экспоненциальное	$Э(x;\lambda)=\begin{cases}0 \text{ при } x\leqslant 0,\\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x>0\end{cases}$ $0\leqslant x<+\infty$, $\lambda>0$

Таблица 2.2.5

личин с различными распределениями

рафик плотности распределения	Формула получения случайной величины
	$x' = (b-a)\xi_p + a$, где $\xi_p \in [0,1]$
	Для $x_0 = 0$, $\sigma = 1$ 1. $\eta = \omega_n - \frac{1}{20n}\left(\omega_n^3 - 3\omega_n\right)$, $n > 5$; 2. $\eta = \omega_n - \frac{41}{13440n^2} \times \left(\omega_n^5 - 10\omega_n^3 + 15\omega_n\right)$, $n > 2$. Для $x_0 \neq 0$, $\sigma \neq 1$ $x' = \sigma\eta + x_0$; $\eta_0 = \sigma\eta$
	$x' = -\frac{1}{\lambda}\ln\xi_p$

Наименование распределения	Плотность распределения
Гамма-распределение	$f_k(x;\lambda)=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}e^{-\lambda x}x^{k-1}$ k — целое, $k>0$, $\lambda>0$, $0<x<+\infty$
Хи-квадрат	$f_k(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}-1} & \text{при } x>0\end{cases}$ $0<x<+\infty$
Логарифмически нормальное	$l(x;\mu;\sigma_z)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \frac{1}{\sigma_z x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2} & \text{при } x\end{cases}$ $u=\frac{\ln x-\mu}{\sigma_z}$, $0<x<+\infty$, $\sigma_z>0$

Продолжение

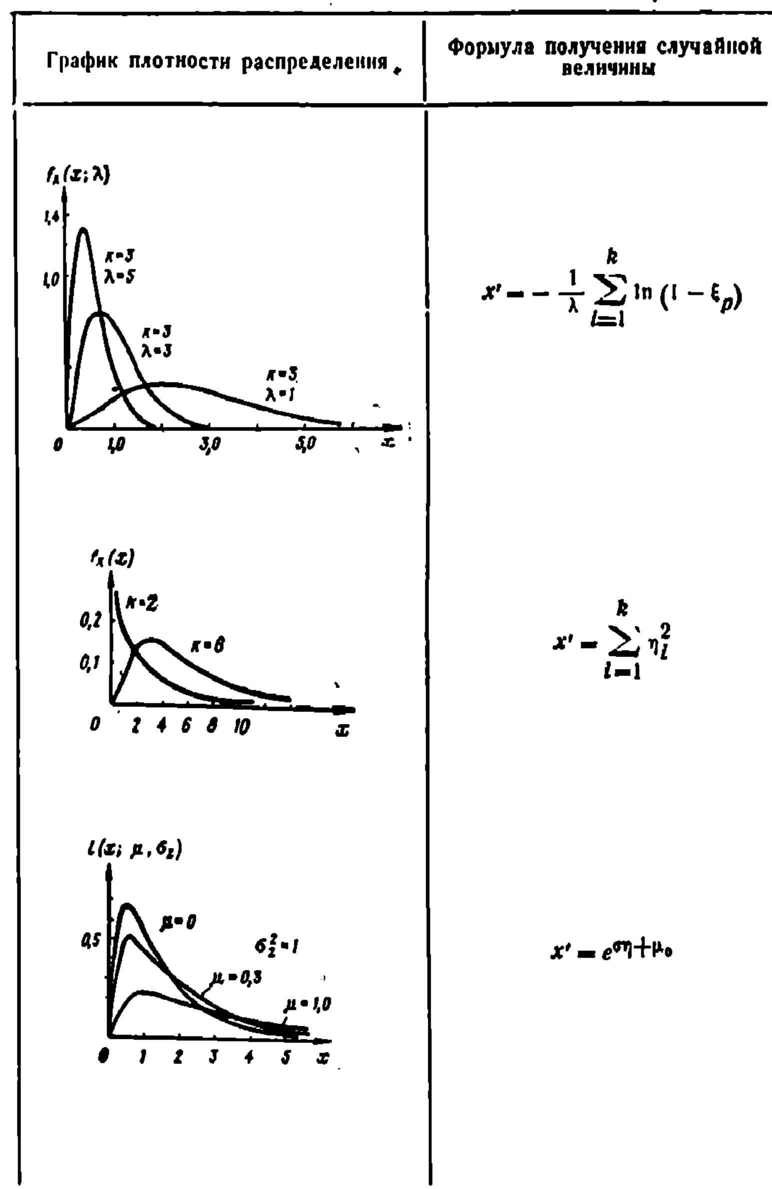
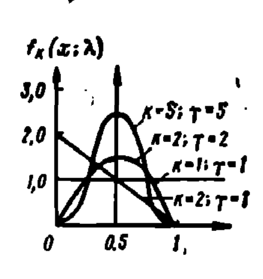


График плотности распределения	Формула получения случайной величины
	$x' = -\frac{1}{\lambda}\sum_{l=1}^{k}\ln(1-\xi_p)$
	$x' = \sum_{l=1}^{k}\eta_l^2$
	$x' = e^{\sigma\eta+\mu_0}$

Наименование распределения	Плотность распределения
Бета-распределение	$f_k(x;\lambda) = C\cdot x^{\gamma-1}(1-x)^{k-1}$, $C = \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(k)}$, $0 < x < 1$, k — целое, $k > 0$, $\gamma > 0$ — целые
Вейбулла	$f(x;\sigma,\gamma) = \frac{\gamma}{\sigma^\gamma}x^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\gamma\right]$, $0 < x < \infty$, $\gamma > 0$, $\sigma > 0$
Релея	$k(x;\sigma_k) = \frac{x}{\sigma_k^2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_k^2}\right]$, $0 < x < \infty$, $\sigma_k > 0$

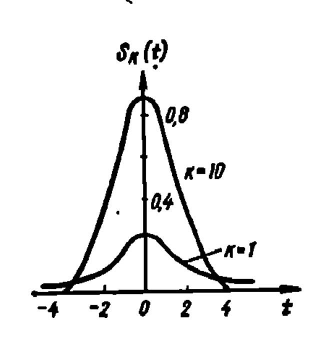
Продолжение

График плотности распределения	Формула получения случайной величины
	$$x' = \frac{\sum_{l=1}^{2\gamma} \eta_l^2}{\sum_{l=1}^{2\gamma} \eta_l^2 + \sum_{l=2\gamma+1}^{2\gamma+2k} \eta_l^2}$$
$f(x;\sigma,\gamma)$ 1,0 γ=4; σ=1 γ=1; σ=1 0 1 2 3 4 x	$$x' = -\sigma\left[\ln\left(1-\xi_p\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$
$\kappa(x;\sigma_\kappa)$ $\sigma_\kappa=1$ 0 1 2 3 x	$$x' = \sqrt{-2\ln\xi_p}$$

Наименование распределения	Плотность распределения
Стьюдента	$$S_k(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$ $-\infty < t < +\infty$
z-распределение Фишера	$$f_{k_1k_2}(x)=C_1\frac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(1+x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}},$$ $$C_1=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)},$$ $0 < x < +\infty$

Примечание. В приведенных формулах
k, k_1 и k_2 — число степеней свободы в соотв
$\Gamma(k)$ — гамма-функция k;
ξ_p — случайная величина, равномерно
η — нормированная случайная величи
с $x_0 = 0$ и σ любым;
x_0 — математическое ожидание (МО);
σ — среднее квадратическое отклоне
μ — МО случайной величины $Z = \ln X$
σ_z — ско случайной величины $Z = \ln X$

Продолжение

График плотности распределения	Формула получения случайной величины
	1) Моделируется последовательность чисел η_{0l}, $l = 1, 2, \ldots, k, k+1$ 2) $x' = \dfrac{\eta_{0,\,k+1}}{\sqrt{\dfrac{1}{k}\sum\limits_{l=1}^{k}\eta_{0l}}}$
$f_{к_1,к_2}(x)$	1) Моделируется последовательность чисел η_{0l}, $l = 1, 2, \ldots, k_1, k_1+1, \ldots, k_1+k_2$. 2) $x' = \dfrac{\sum\limits_{l=0}^{k_1}\eta_{0l}^2}{\sum\limits_{l=k_1+1}^{k_1+k_2}\eta_{0l}^2}$

вующих распределениях;

пределенная в интервале [0,1];

имеющая нормальное распределение с $x_0 = 0$ и $\sigma = 1$, а η_0 — то же, но

(ско);

Получение дискретных случайных величи[н]

Наименование распределения	Вероятность получения случайной величины
Биномиальное	$b(x;\ n,\ \theta) = C_n^x \theta^x (1-\theta)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$, $0 < \theta < 1$
Геометрическое	$g(x;\ \theta) = (1-\theta)^{x-1}\theta$, $x = 1, 2, \ldots$, $0 < \theta < 1$
Паскаля	$f(x;\ s,\ \theta) = C_{x+s-1}^x \theta^s (1-\theta)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots$, $0 < \theta < 1$
Пуассона	$f(x;\ \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}}{x!}\lambda^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Таблица 2.2.6

с различными распределениями

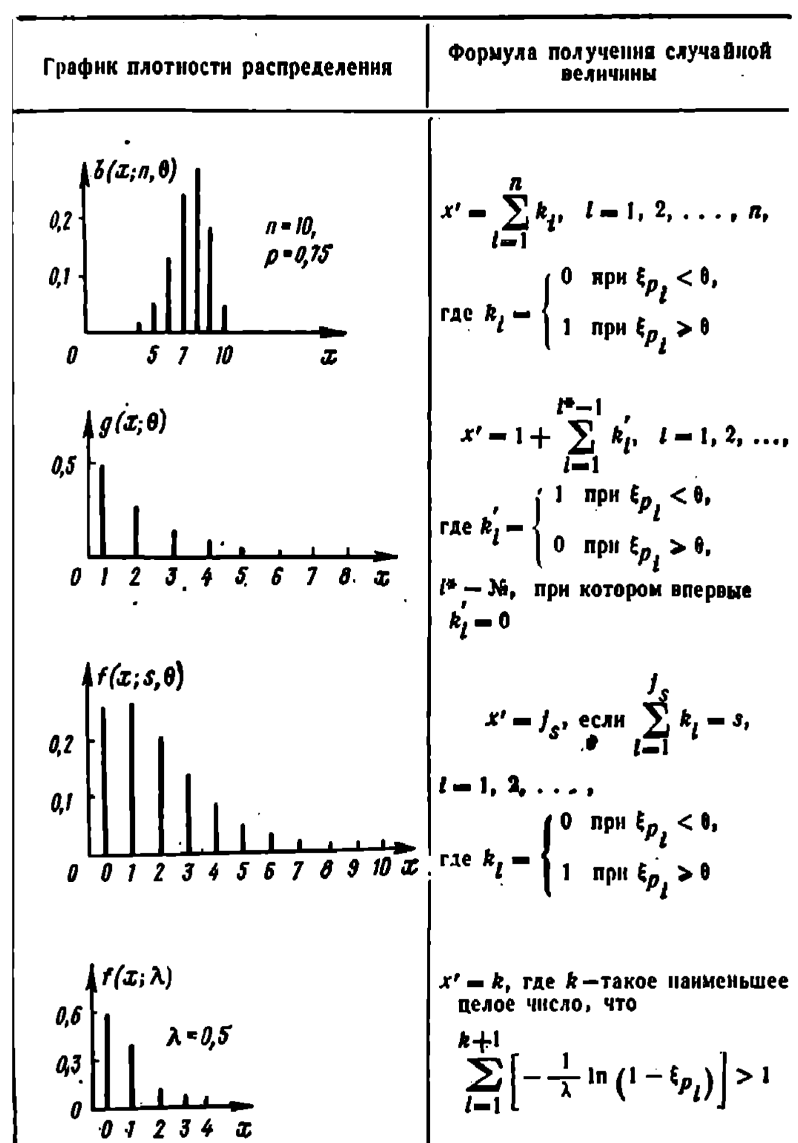


График плотности распределения	Формула получения случайной величины
$b(x; n, \theta)$	$x' = \sum_{l=1}^{n} k_l,\quad l = 1, 2, \ldots, n,$ где $k_l = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi_{p_l} < \theta, \\ 1 & \text{при } \xi_{p_l} > \theta \end{cases}$
$g(x; \theta)$	$x' = 1 + \sum_{l=1}^{l^*-1} k'_l,\quad l = 1, 2, \ldots,$ где $k'_l = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi_{p_l} < \theta, \\ 0 & \text{при } \xi_{p_l} > \theta, \end{cases}$ l^* — №, при котором впервые $k'_l = 0$
$f(x; s, \theta)$	$x' = j_s$, если $\sum_{l=1}^{j_s} k_l = s$, $l = 1, 2, \ldots,$ где $k_l = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi_{p_l} < \theta, \\ 1 & \text{при } \xi_{p_l} > \theta \end{cases}$
$f(x; \lambda)$	$x' = k$, где k — такое наименьшее целое число, что $\sum_{l=1}^{k+1} \left[-\frac{1}{\lambda} \ln (1 - \xi_{p_l}) \right] > 1$

Формулы оценок основных параметров эмпирического распределения случайной величины x в методе статистических испытаний на ЭЦВМ приведены в табл. 2.2.7.

Таблица 2.2.7

Параметр	Формульное выражение
Математическое ожидание	$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Дисперсия	$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ при $n > 40$, $s_1^2 = \frac{n}{n-1} s^2$ при $n < 40$
Среднее квадратическое (стандартное) отклонение	$s = +\sqrt{s^2}$ при $n > 40$, $s_1 = +\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$ при $n < 40$, $s_2 \approx \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{9}{32n^2}\right) s_1$ при $n > 10$ для нормального распределения
Корреляционный момент случайных величин X и Y	$K_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$ при $n > 40$, $K'_{xy} = \frac{n}{n-1} K_{xy}$ при $n < 40$
Асимметрия	$S_k = \frac{m_3}{s^3} = \frac{1}{n \cdot s^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3$
Эксцесс	$E_x = \frac{m_4}{s^4} - 3 = \frac{1}{n \cdot s^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 - 3$

Оценки $\bar{x}$, s^2, s_1^2, K_{xy}, K'_{xy} и s_2 являются несмещенными состоятельными оценками теоретического распределения, остальные оценки — состоятельные, но смещенные. В табл. 2.2.7 величина $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k$ означает эмпирический центральный момент k-го порядка.

Точность статистических оценок искомых параметров зависит от характеристик моделируемого случайного процесса и от числа реализаций модели на ЭЦВМ. Для ее оценки существует несколько методов. Основными из них являются:

— определение среднего квадратического отклонения $\sigma_{\bar{\theta}}$ рассчитанного параметра $\bar{\theta}$ от теоретически точного θ;

— определение доверительных интервалов 2ε полученных оценок $\bar{\theta}$ на основании заданных доверительных вероятностей α.

В первом случае расчеты основываются на вычислении эмпирических центральных моментов второго m_2 и четвертого m_4 порядка моделируемой случайной величины x.

Формулы для определения средних квадратических отклонений основных параметров искомых распределений имеют следующий вид.

Для математического ожидания $\bar{x}$:

— при известной дисперсии σ_x^2:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}; \qquad (2.2.9)$$

— при неизвестной дисперсии (что наиболее часто встречается при применении метода статистических испытаний):

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \qquad (2.2.10)$$

Для эмпирической дисперсии $\tilde{D}_x = s^2$ и среднего квадратического отклонения s:

— в случае нормального распределения:

$$\sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\,s^2 \text{ и } \sigma_s = \frac{s}{\sqrt{2n}}; \qquad (2.2.11)$$

— в общем случае:

$$\sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{m_4 - m_2^2}{n}} \quad \text{и} \quad \sigma_s = \frac{\sqrt{m_4 - m_2^2}}{2s\sqrt{n}}. \qquad (2.2.12)$$

Для относительной частоты появления события $A - \bar{p}$:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}. \qquad (2.2.13)$$

При малых n и при $\bar{p}$, близких к 0 или 1, ошибка в вычислении $\sigma_{\bar{p}}$ по формуле (2.2.13) может быть существенной, что необходимо учитывать при проведении статистических испытаний.

Во втором случае, основанном на применении соотношения $P\{|\bar{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = \alpha$ (см. раздел 1.2), рассчитывается доверительный интервал 2ε, определяющий точность статистической оценки $\bar{\theta}$, в зависимости от доверительной вероятности α, характеризующей ее надежность, и от числа реализаций модели — n.

Такой метод позволяет более полно сделать заключение о степени близости статистической оценки параметра $\bar{\theta}$ к соответствующей характеристике θ' теоретического распределения. Для реализации метода в памяти ЭЦВМ необходимо хранить таблицы функций распределения Лапласа и Стьюдента. Расчетные формулы по определению доверительных интервалов искомых параметров (математического ожидания случайной величины $x - \bar{x}$, среднего квадратического отклонения ее — s, вероятности появления события $A - \bar{p}$) имеют следующий вид.

Для математического ожидания:

— при известной дисперсии σ_x^2:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Phi^{(-1)}(\alpha), \qquad (2.2.14)$$

где $\Phi^{(-1)}(\alpha)$ — функция, обратная функции Лапласа;

— при неизвестной дисперсии:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}, \qquad (2.2.15)$$

где s^2 — статистическая оценка дисперсии ($s^2=\tilde{D}_x$);

t_{α} — параметр распределения Стьюдента, значения которого в зависимости от числа степеней свободы $k=n-1$ и доверительной вероятности α приведены в табл. 1 приложения.

Для практических целей может быть использована упрощенная табл. 2.2.8.

Таблица 2.2.8

α \ n	5	10	20	40	∞
0,2	0,271	0,261	0,257	0,255	0,253
0,4	0,569	0,543	0,533	0,529	0,524
0,6	0,941	0,883	0,861	0,851	0,842
0,7	1,19	1,10	1,07	1,05	1,04
0,8	1,53	1,38	1,33	1,30	1,28
0,9	2,13	1,83	1,73	1,69	1,64
0,95	2,77	2,26	2,09	2,01	1,96
0,98	3,75	2,82	2,54	2,42	2,33
0,99	4,60	3,25	2,86	2,70	2,58

Здесь значения t_{α} при $n=\infty$ соответствуют условиям расчета при известной дисперсии.

При $n > 100$ величина $\varepsilon_{\bar{x}}$, практически равна

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \Phi^{(-1)}(\alpha). \qquad (2.2.16)$$

Для определения доверительных интервалов (ε) эмпирической дисперсии ($s^2=\tilde{D}$) и среднего квадратического отклонения (s) случайной величины x в процессе статистического моделирования на ЭЦВМ целесообразно вместо

формулы (2.2.16) применять более простые выражения. Для $n>30\div40$ эти формулы имеют следующий вид:

$$\varepsilon_D=\sqrt{\frac{m_4-m_2^2}{n}}\,\Phi^{(-1)}(\alpha); \qquad (2.2.17)$$

$$\varepsilon_s=\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{m_4-m_2^2}{n}}\,\Phi^{(-1)}(\alpha). \qquad (2.2.18)$$

В этих формулах:
α — заданная доверительная вероятность;

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k, \qquad (2.2.19)$$

m_k — эмпирический центральный момент k-го порядка;
$\Phi^{(-1)}(\alpha)$ — функция, обратная функции Лапласа $\Phi(\alpha)$:

$$\Phi(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt. \qquad (2.2.20)$$

Функция $\Phi(\alpha)$ вычисляется в ЭЦВМ по стандартной программе или же по табл. III [1].

Для предполагаемого нормального распределения моделируемой случайной величины x близость оценки s к теоретическому значению среднего квадратического отклонения σ_x устанавливается с помощью более точного соотношения:

$$P\{\gamma_1 s<\sigma_x<\gamma_2 s\}=P\left\{\gamma_1<\frac{\sigma_x}{s}<\gamma_2\right\}. \qquad (2.2.21)$$

Значения относительных границ γ_1, γ_2 доверительного интервала выбираются из табл. 3 приложения или сокращенной табл. 2.2.9, которая записывается в память ЭЦВМ.

Таблица 2.2.9

n	5		10		20		40		80		120	
α	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
0,90	0,65	2,37	0,73	1,65	0,79	1,37	0,85	1,23	0,89	1,15	0,93	1,09
0,95	0,60	2,87	0,69	1,83	0,76	1,46	0,82	1,28	0,86	1,18	0,91	1,11
0,98	0,55	3,67	0,64	2,08	0,72	1,58	0,79	1,35	0,84	1,22	0,90	1,13
0,99	0,52	4,39	0,62	2,28	0,70	1,67	0,77	1,40	0,83	1,25	0,88	1,15

Оценка точности частости события A—$\bar{p}$, как статистической вероятности его появления, производится, исходя из требуемой надежности оценки α и произведенного числа реализаций n по формуле

$$\varepsilon_p = t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = t_\alpha \sqrt{\frac{\bar{p}\left(1-\bar{p}\right)}{n}}, \qquad (2.2.22)$$

где t_α выбирается по α и n из табл. 2.2.8.

2.2.6. Количество реализаций статистической модели, необходимое для обеспечения заданной точности

Необходимое число реализаций n, обеспечивающее заданную точность и надежность результата, определяется обращенными формулами в разделе 2.2.5, которые устанавливают зависимость между числом испытаний n, доверительной вероятностью α и доверительным интервалом 2ε искомого параметра.

Для вычисления числа n на практике применяются следующие формулы:

а) при определении математического ожидания:

$$n = t_\beta \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x^2}; \qquad (2.2.23)$$

б) при определении вероятности события:

$$n = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon_p^2} \bar{p} \left(1 - \bar{p}\right); \quad (2.2.24)$$

в) при определении дисперсии:
— в общем случае:

$$n = \frac{t_\alpha \left(m_4 - \sigma_x^4\right)}{\varepsilon_\sigma}; \quad (2.2.25)$$

— в случае нормальной случайной величины:

$$n = t_\alpha \frac{2\sigma_x^4}{\varepsilon_\sigma}. \quad (2.2.26)$$

Так как до начала испытаний σ_x и $\bar{p}$ неизвестны, то сначала целесообразно на ЭЦВМ осуществить небольшое число реализаций модели $n_0 = 20 \div 30$ и получить значения s и $\bar{p}$. Затем по n_0 и заданному α найти t_α (табл. 2.2.8). После чего по формулам (2.2.23) и (2.2.24) вычисляется необходимое значение n.

Для часто встречающегося требования $\alpha = 0,95$ необходимое число реализаций n для различных $\bar{p}$ и ε приведено в табл. 2.2.10.

Таблица 2.2.10

$\bar{p}$		n		
		$\varepsilon_p = 0,05$	$\varepsilon_p = 0,02$	$\varepsilon_p = 0,01$
0,1	0,9	140	900	3600
0,2	0,8	250	1500	6200
0,3	0,7	330	2100	8400
0,4	0,6	380	2300	9400
0,5		390	2400	9800

Существуют более точные формулы для определения числа n, однако они, усложняя вычисление, незначительно повышают точность определения величины n.

При применении метода последовательного анализа число необходимых реализаций модели заранее не рассчитывается. В этом случае алгоритм обработки результатов моделирования на ЭЦВМ включает в себя анализ необходимости производства очередной реализации модели в соответствии с теорией последовательного анализа (см. раздел 2.1).

2.2.7. Статистическая проверка гипотез об эмпирическом законе распределения

Применение метода статистических испытаний на ЭЦВМ позволяет легко построить гистограмму эмпирического распределения, являющуюся аналогом графика его плотности вероятности $f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots)$, а также получить дополнительные данные о соответствии эмпирического распределения предполагаемому теоретическому с помощью критериев согласия, параметры которых рассчитываются в процессе моделирования.

Проверку наиболее эффективно осуществлять по *критерию согласия Пирсона* (хи-квадрат), так как его применение не требует построения экспериментальной и гипотетической функций распределения (раздел 1.2).

Для проверки соответствия эмпирического распределения одному из G гипотетических распределений с функциями плотности $f_q(x, \theta_1, \theta_2, \ldots)$, $q=1, 2, \ldots, G$ целесообразно число реализаций n взять больше рассчитанного по формулам (2.2.23)—(2.2.26) на 20—25%.

Алгоритм вычисления критерия χ^2 строится по следующему правилу.

1. Возможный диапазон изменения случайной величины x разбивается на l' разрядов (обычно 20—30) с границами $\left(x'_{j-1}, x'_j\right)$ $j = 1, 2, \ldots, l'$; $x'_j - x'_{j-1} = h_j = \text{const}$.

2. В каждой i-й реализации $i=1, 2, \ldots, n$ фиксируется попадание случайной величины x_i в j-й разряд:

$$\nu_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ — если } x \in \left[x'_{j-1}, x'_j\right], \\ 0 \text{ — в противном случае,} \end{cases}$$

3. Организуется счетчик чисел ν_{ij} по каждому j после каждой реализации:

$$n_j = \sum_i \nu_{ij} = \sum_{i-1} \nu_{i-1,\,j} + \nu_{ij}. \qquad (2.2.27)$$

В результате после n реализаций формируется матрица-строка частостей

$$\tilde{p}_j = \frac{n_j}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, l'. \qquad (2.2.28)$$

4. Разряды с начала строки и с ее конца, для которых $\tilde{p}_j = 0$, отбрасываются, и осуществляется их перенумерация. При этом общее число разрядов равно $l < l'$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

5. Вычисляются теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый из разрядов (x'_{j-1}, x'_j):

$$P_{qj} = \int_{x'_{j-1}}^{x'_j} f_q(x, \theta_1, \theta_2, \ldots)\, dx, \qquad (2.2.29)$$

$$q = 1, 2, \ldots, G,$$

где $f_q(x, \theta_1, \theta_2, \ldots)$ — функция плотности q-го распределения случайной величины x, определяемая параметрами θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_r$, значения которых рассчитываются в процессе моделирования.

В результате вычислений P_{qj} в машине формируется матрица значений P_{qj}, $j = 1, 2, \ldots, l$; $q = 1, 2, \ldots, G$.

6. Рассчитываются величины χ_q^2, соответствующие данной выборке (n) и выдвинутым G гипотезам:

$$\chi_q^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{l} \frac{n_j^2}{P_{qj}} - n, \qquad (2.2.30)$$

$$q = 1, 2, \ldots, G.$$

7. Определяется число степеней свободы q-го распределения χ_q^2:

$$k_q = l - 1 - r, \qquad (2.2.31)$$

$$q = 1, 2, \ldots, G,$$

где r — число неизвестных параметров теоретического распределения (θ_1, θ_2, ... θ_r), определяемых в процессе моделирования.

Значения P_{qj}, $j = 1, 2, \ldots, l$; χ_q^2 и k_q, $q = 1, 2, \ldots, G$ выдаются на печать. Исследователь по табл. 6 приложения определяет величину

$$P_q = P\left\{\chi^2 > \chi_q^2\right\}, \tag{2.2.32}$$

а значения P_{qj} использует для построения гистограммы. Здесь P_q — вероятность того, что при принятой гипотезе случайная величина χ^2 превзойдет значение, полученное по формуле (2.2.30). Если эта вероятность P_q меньше принятого уровня значимости P_δ, то гипотезу отвергают, как неправдоподобную.

Значение P_δ выбирается исследователем, исходя из практической ценности ошибок 1-го рода — отказа от верной гипотезы, или 2-го рода — принятия неверной гипотезы. Обычно $P_\delta = 0{,}01 \div 0{,}10$.

Критерий согласия позволяет делать более или менее удовлетворительные выводы при числе испытаний >60.

Необходимо иметь в виду следующее:

1. При проверке гипотез нами всегда предполагалось, что наблюдения являются стохастически независимыми. Если наблюдения хотя бы слабо коррелированы, то достоверность результата снижается.

2. Удовлетворительное согласие между наблюдениями и проверяемой гипотезой не тождественно доказательству справедливости этой гипотезы. Такое согласие означает лишь то, что гипотеза оказалась не опровергнутой при анализе результатов имеемых наблюдений. Получение дополнительных данных может привести к тому, что эту гипотезу придется изменить и даже отвергнуть.

2.2.8. Схема применения метода статистических испытаний на ЭЦВМ

При исследовании процесса функционирования сложной системы схема применения метода статистических испытаний состоит в следующем.

1) Определяются, во-первых, исходные данные (детерминированные и, особенно, случайные), влияющие на функционирование исследуемой системы, и, во-вторых, совокупность параметров, определяющих выходные величины, характеризующие эффективность данной системы (например, математическое ожидание и дисперсия числа обнаруженных подводных лодок противника).

2) Рассматриваемая сложная система расчленяется на более простые, самостоятельно функционирующие подсистемы, каждая из которых описывается своими случайными характеристиками и своей группой входных и выходных величин. Такая подсистема в общей системе представляет отдельный блок.

3) Разрабатываются математические модели каждого блока, а затем всего исследуемого процесса в целом. На основании опыта или имеющейся информации выбираются законы распределения случайных величин, определяющих простые случайные явления в каждой подсистеме.

4) Разрабатываются алгоритмы получения случайных величин, подчиняющихся законам распределения, определенным в соответствии с п. 3 настоящей схемы, по формулам таблиц 2.2.5 и 2.2.6 и раздела 2.2.3.

5) Разрабатывается алгоритм определения и анализа статистических оценок искомых характеристик исследуемой сложной системы в зависимости от цели, стоящей перед исследователем (по формулам разделов 2.2.5 и 2.2.6). При наличии соответствующих стандартных программ (СП) для данной ЭЦВМ этапы разработки алгоритмов по пп. 4 и 5 заменяются выбором необходимых СП для решения данной задачи.

6) Осуществляется запись алгоритма частных блоков и всей математической модели в целом на одном из алгоритмических языков или составляется программа решения задачи в кодах используемой ЭЦВМ. Производится отладка программы.

Выбор алгоритмического языка осуществляется в зависимости от характера задачи и оснащения ЭЦВМ системой трансляторов.

7) Обосновывается необходимое число реализаций при проведении статистических испытаний данной модели теоретически в соответствии с разделом 2.2.7 или экспериментально, осуществляя моделирование с различным зна-

чением n_k $(n_k=n_{k-1}+\Delta n)$ и сравнивая при этом значение одного и того же параметра.

В случае применения методов последовательного анализа необходимое число реализаций не обосновывается, а в п. 5 дополнительно включается алгоритм окончания моделирования в соответствии с правилами, изложенными в разделе 2.1.

8) Разрабатывается план исследований данного процесса методом статистических испытаний на ЭЦВМ и организуется его осуществление.

План исследований имеет цель определить порядок изменения исходных данных, с тем чтобы анализ выходных величин позволил исследователю наиболее оптимально (в смысле наименьших затрат времени и средств) решить поставленную перед ним задачу. При этом целесообразно заранее разработать таблицы изменения исходных данных и выходных величин. Кроме того, очень полезно предварить исследования макетами графиков изменения искомых выходных величин в зависимости от вариации исходных данных, что значительно упростит обработку результатов опыта.

Пример 2.2.3. В результате моделирования на ЭЦВМ процесса поиска подводных лодок в заданном районе, проводимого разнородными силами постоянного состава в течение определенного оперативного периода, после 125 реализаций модели получены следующие данные, часть из которых сведена в табл. 2.2.11:

$x_{j=1}=96$ — минимальное число обнаружений;

$x_{j=8}=128$ — максимальное число обнаружений;

$l=8$ — общее число разрядов $(j=1, 2, \ldots, 8)$;

$\bar{x}=112{,}8$ и $s=6{,}4$ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа обнаруженных подводных лодок;

$\chi_q^2=2{,}29$ — параметр критерия χ^2;

$k=5$ — число степеней свободы.

В табл. 2.2.11 обозначено: j — номер разряда; x'_j, x'_{j-1} — верхняя и нижняя границы j-го разряда, которым соответствуют граничные значения количества обнаружений; n_j — количество наблюдений, соответствующее числу обнаружений, попавших в j-й разряд.

Требуется:

1. Построить гистограмму и выдвинуть гипотезу о предполагаемом законе распределения.

Таблица 2.2.11

j	$x'_{j-1}-x'_j$	n_j	$\bar{p}_j = \frac{n_j}{n}$
1	96—100	3	0,024
2	100—104	7	0,056
3	104—108	20	0,160
4	108—112	28	0,224
5	112—116	30	0,240
6	116—120	17	0,136
7	120—124	15	0,120
8	124—128	5	0,040

2. Найти статистические оценки параметров $\bar{x}$ и s по схеме средних квадратических оценок и по доверительным интервалам, если $\beta = 0,9$.

3. Найти необходимое число реализаций для определения параметров $\bar{x}$ и s, если $\alpha = 0,9$ и $\varepsilon = 0,99$.

4. Провести проверку гипотезы о согласии эмпирического распределения числа обнаруженных подводных лодок с законом распределения, принятым в п. 1 задания, для $P_\delta = 0,10$.

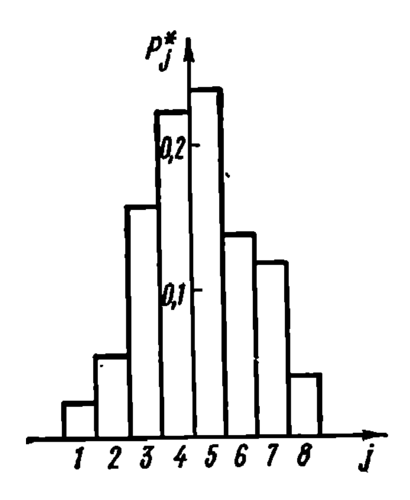


Рис. 2.2.2

Решение. 1. Построение гистограммы. По данным табл. 2.2.11 $(\bar{p}_j)$ построена гистограмма числа обнаруженных подводных лодок. На рис. 2.2.2 приведен ее вид. Как видно из рисунка, распределение близко к нормальному.

2. Определение оценок для $\bar{x}$ и s:
1) по схеме средних квадратических оценок:
а) для $\bar{x}$ по формуле (2.2.10)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{6,4}{125} = 0,05;$$

б) для s по формуле (2.2.11)

$$\sigma_s = \frac{s}{\sqrt{2n}} = \frac{6,4}{\sqrt{2 \cdot 125}} = 0,4;$$

2) по схеме доверительных интервалов:
а) для математического ожидания:
— по табл. III [1] для $\alpha = 0,9$ находим $\Phi^{(-1)}(0,9) = 1,645$;
— по формуле (2.2.10), так как $n > 100$, рассчитываем $\varepsilon_{\bar{x}} = 6,4/125 \cdot 1,645 = 0,95$;

б) для среднего квадратического отклонения по табл. 2.2.9 определяем $\gamma_1 = 0,93$ и $\gamma_2 = 1,09$.

Таким образом, с вероятностью 0,9 можно утверждать, что полученные оценки $\bar{x}$ и s находятся соответственно в пределах интервалов $(111,85 < \bar{x} < 113,75)$ и $(6,0 < s < 7,0)$.

3. Необходимое число реализаций:
1) для $n = 125$ и $\alpha = 0,9$ по табл. 2.2.8 находим t_α:

$$1,69 > t_\alpha > 1,64 \text{ (примем } t_\alpha = 1,66);$$

2) по формулам (2.2.23) и (2.2.26) рассчитаем n:
а) для $\bar{x}$

$$n = 1,66 \frac{6,4^2}{0,99^2} \approx 10,9^2 \approx 120;$$

б) для s

$$n = 1,66 \frac{2 \cdot 6,4^4}{0,99} \approx \frac{3,32}{0,99} 1780 \approx 5950.$$

Таким образом, для определения $\bar{x}$ число реализаций $n = 125$ достаточно, а для определения s с требуемой точностью крайне мало.

4. Проверка гипотезы о нормальном распределении для $P_\delta = 0,10$.

По табл. 6 приложения по $\chi^2_q = 2,29$ и $k = 5$ определяем: вероятность $P_q = 0,80$. Так как $P_q > P_\delta$, то гипотеза о нормальном законе распределения не опровергается.

2.2.9. Методика разработки математических моделей

Общие принципы математического моделирования заключаются в расчленении процесса моделирования на самостоятельные (в определенной мере) задачи, которые в своей совокупности образуют правила разработки всей модели, начиная от постановки задачи и кончая ее реализацией на ЭЦВМ.

Принципиально весь процесс разработки моделей задач исследования операций может быть разделен на четыре основных этапа. Схема такой градации приведена на рис. 2.2.3.

I этап. 1-й подэтап. Формулировка цели и назначения модели.

Цель модели определяется основными параметрами, которые она позволяет рассчитывать при заданных исходных данных.

Назначение модели указывает, для решения какого класса задач и в каких условиях она может быть использована. Класс задачи определяется ее «масштабностью» — стратегическая, оперативная или тактическая. Условия использования задачи характеризуют ее применение — в научно-исследовательских целях, в оперативно-тактических расчетах или в автоматизированной системе управления силами. В этом подэтапе формулируются и основные оперативно-тактические требования, которым должна удовлетворять разрабатываемая модель.

2-й подэтап. Определение объектов, участвующих в операции. Здесь, во-первых, определяются боевые единицы, которыми будем оперировать в модели: одиночный корабль, самолет, тактическая группа, звено, бригада, эскадрилья, полк и т. д., и, во-вторых, составляется перечень боевых единиц во всей системе моделируемых боевых действий: силы противника (основные, обеспечивающие и др.); свои ударные и обеспечивающие силы; силы разведки; управляющий орган (кто и какую информацию обрабатывает и кто принимает решение).

3-й подэтап. Разработка принципиальной схемы обстановки.

Разрабатывается графическая схема (при необходимости несколько схем), наглядно отображающая функциони-

рование изучаемых объектов. На ней должны быть отражены принципиальные схемы действия своих сил и сил противника.

4-й подэтап. Формализация процесса функционирования моделируемой системы. Подэтап определяет функциональные связи взаимодействия боевых единиц и параметров, влияющих на их эффективность, и включает в себя следующие позиции:

— определение метода управления боевыми единицами на каждом из этапов боевых действий — централизованный или децентрализованный;

— четкое фиксирование линий поступления информации на управляющий орган и на боевые единицы, а также линий передачи команд на них;

— определение принципа распределения боевых единиц по объектам удара или в области вероятного местонахождения цели при выбранном методе управления, а при необходимости и условий его изменения;

— определение принципов взаимодействия боевых единиц на всех этапах боевых действий — формализация тактики сил и способов управления ими.

Именно на этом подэтапе определяются все основные связи управления и взаимодействия исследуемых элементов системы, т. е. фактически происходит анализ всей операции и определяются возможные варианты действия сил, закладываемые в модель.

5-й подэтап. Формулировка оперативно-тактических ограничений модели. Модель не может реализовать все возможные варианты поведения исследуемого явления. Поэтому для правильного уяснения границ применимости разрабатываемой модели следует ясно сформулировать закладываемые в нее оперативно-тактические допущения и ограничения.

На этом подэтапе определяются следующие ограничения: пространственные, временные, по способам управления, по способам взаимодействия сил и средств, по использованию сил и средств разведки, по использованию оружия, а также по другим существенным в задаче параметрам.

6-й подэтап. Разработка укрупненной блок-схемы модели. При этом определяется общая последовательность действия сил и оценка их эффективности в будущей модели, которая и должна быть зафиксирована на укрупнен-

СХЕМА РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ

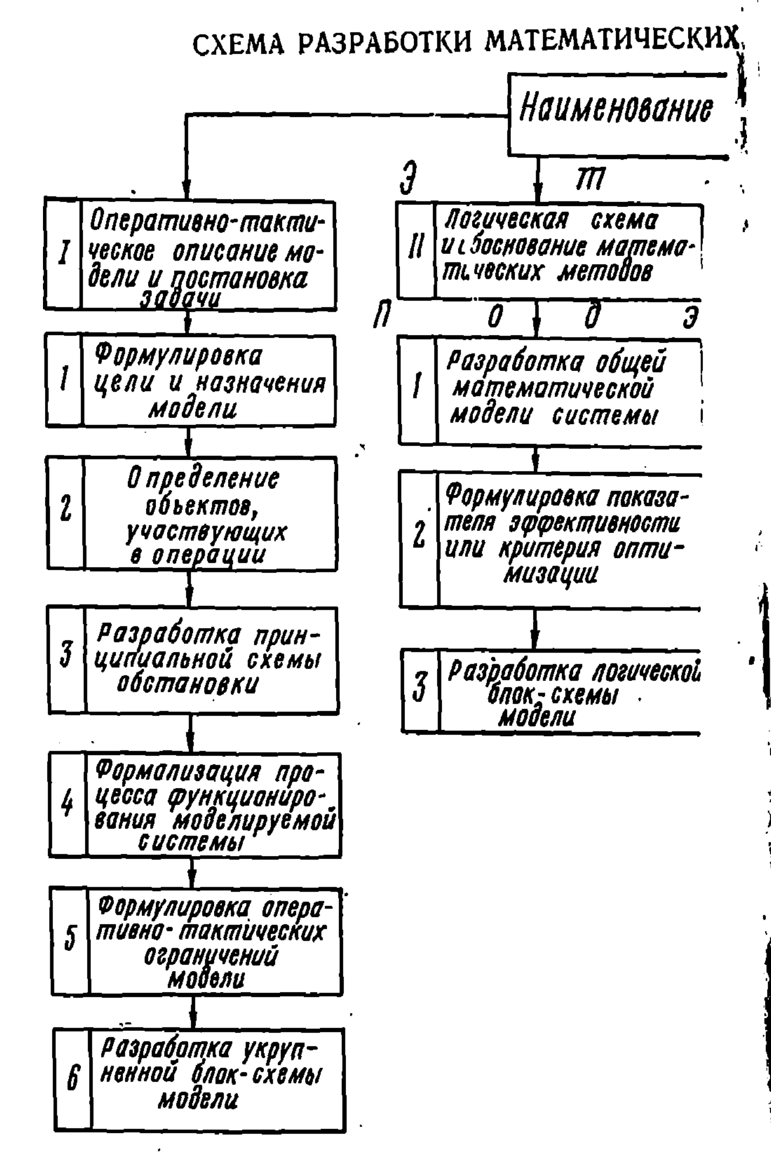
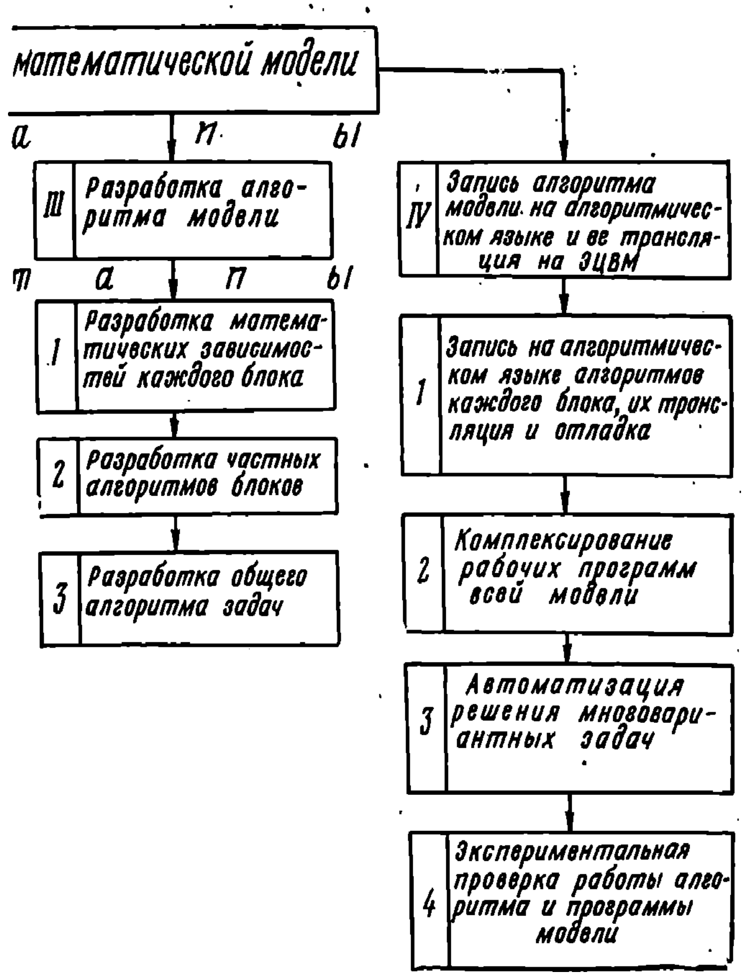


Рис.

МОДЕЛЕЙ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ



2.2.8.

ной блок-схеме модели. Такая схема явится основой для дальнейшей разработки модели.

II этап. 1-й подэтап. Разработка общей математической модели системы. Этот подэтап предусматривает следующие операции:

— обоснование и выбор математического метода решения задачи: аналитический, стохастический или смешанный;

— выбор основных математических зависимостей, оценивающих действие боевых единиц на каждом этапе управления или боевого столкновения: определение исходных данных, необходимых для расчета той или иной величины; принятие этих исходных данных как «входной информации» для всей задачи или определение порядка их расчета на основании имеющихся исходных величин, выбор или вывод формульных зависимостей;

— выбор вероятностных характеристик, определяющих эффективность функционирования системы на каждом этапе управления (по всем линиям управления);

— определение и формулировка математических допущений и ограничений (например, объект распределен в районе по закону равной вероятности, ошибка во времени передачи команд на ударные силы подчиняется нормальному закону и т. д.);

— математическая постановка задачи: перечисляется, что дано и что требуется определить в разрабатываемой модели;

— разработка перечней входных и выходных данных.

2-й подэтап. Формулировка показателя эффективности или критерия оптимизации. На этом подэтапе осуществляются:

— выбор основных и дополнительных показателей эффективности, например, математическое ожидание числа уничтоженных кораблей ядра — основной показатель, а кораблей охранения — дополнительный;

— выбор критерия оптимизации и дисциплинирующих условий, например, минимум стоимости решения задачи — критерий оптимизации, а заданное соотношение сил — дисциплинирующее условие.

3-й подэтап. Разработка логической блок-схемы модели. Подэтап состоит из следующих операций:

— разделение всей модели на блоки, имеющие самостоятельный характер расчетов (определение выходных величин каждого блока);

— определение логических связей между блоками, формирование внутренних и внешних циклов расчетов;

— составление логической блок-схемы модели.

С этого момента модель можно разрабатывать поблочно, сохраняя только требования к каждому из них.

III этап. 1-й подэтап. Разработка математических зависимостей каждого блока. Подэтап включает в себя:

— определение входных величин для каждого блока (выходные данные определены в 3-м подэтапе II этапа);

— вывод или обоснование необходимых формул;

— проведение контрольных расчетов, позволяющих оценить приемлемость примененных формул;

— выявление малозначащих параметров, уточнение и аппроксимация первоначально выведенных формул и зависимостей.

Этот подэтап предполагает разработку частных математических моделей каждого блока, которые явятся основой для автоматической его работы совместно с другими блоками.

2-й подэтап. Разработка частных алгоритмов блоков. Подэтап решает следующие задачи:

— уточнение выходных величин блока: какие величины формируются в массивы и с какого по какой блок они используются, какие величины идут «транзитом» в следующие блоки, какие величины, в каком цикле расчетов участвуют (определение массивов вычисляемых величин, которые необходимо накапливать от цикла к циклу решения задачи, с учетом записи их на алгоритмическом языке в интересах комплексирования всей задачи и ее трансляции на данной ЭЦВМ);

— разработка логической детальной схемы блока.

Логическую схему целесообразно строить первоначально в виде блок-схемы, где при необходимости группы операций обозначить соответствующим обобщенным оператором, а последний — в виде блок-схемы из частных операторов.

3-й подэтап. Разработка общего алгоритма задачи. На этом подэтапе осуществляются:

— разработка принципиальной логической схемы работы алгоритма, при этом приводятся в единую систему все обозначения задачи, на блок-схеме поблочно указываются все входные данные и выходные величины с фиксированием массивов выходных величин, определяются циклы решения задачи между блоками;

— описание логической схемы работы алгоритма;

— проведение контрольных расчетов по всем основным направлениям решения задачи.

На этом формально заканчивается разработка математической модели исследования операции. Далее осуществляется ее приспособление для практического использования в ЭЦВМ.

IV этап. 1-й подэтап. Запись на алгоритмическом языке алгоритмов каждого блока. На этом подэтапе осуществляются, во-первых, запись на алгоритмическом языке с учетом идентичных операций (процедур) во всех блоках и их комплексирования и, во-вторых, трансляция и отладка отдельных рабочих программ в машинных кодах с контролем правильности перфорации.

2-й подэтап. Комплексирование рабочих программ всей модели. Подэтап включает в себя:

— проверку готовности рабочей программы каждого блока к комплексированию;

— комплексирование программ блоков (распределение внешней памяти ЭЦВМ для хранения как общей числовой информации, так и самих программ, составление информационных карт для каждой программы комплекса, построение комплексатором ведущей программы комплекса и карт ввода программ с перфокарт в машину).

3-й подэтап. Автоматизация решения многовариантных задач. В этом подэтапе составляются специальные программы, которые позволят оператору один раз задать перечень исходных данных, а необходимая последовательность решения этих вариантов будет обеспечена автоматически.

4-й подэтап. Экспериментальная проверка работы алгоритма. Этот подэтап включает в себя:

— расчет контрольных точек на клавишных вычислительных машинах по основным направлениям решения задачи;

— расчет на ЭЦВМ по имеющимся контрольным точкам и устранение выявленных ошибок (в алгоритме и программе);

— экспериментальную проверку модели по широкому диапазону исходных данных и при необходимости окончательную корректуру алгоритма.

Далее по единой схеме (терминология, структура, формулы) производится оформление всех разделов модели:

ее описания, алгоритма и программы на алгоритмическом языке и в кодах ЭЦВМ.

Изложенные принципы разработки математических моделей соответствуют наиболее общему случаю — построению модели сложной, многопараметрической оперативно-тактической задачи. В определенных ситуациях те или иные позиции методики могут и отсутствовать в зависимости от физического содержания задачи и необходимой степени детализации.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ СПОСОБОВ ДЕЙСТВИЙ

3.1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.1.1. Общие сведения

Линейное программирование (планирование) — математический метод отыскания максимума или минимума линейной функции при наличии ограничений в виде линейных неравенств или уравнений.

Максимизируемая (минимизируемая) функция представляет собой принятый критерий эффективности решения задачи, соответствующий поставленной цели. Она носит название *целевой функции.*

Ограничения характеризуют имеющиеся возможности решения задачи.

Сущность решения задач линейного программирования заключается в том, чтобы найти условия, обращающие целевую функцию в минимум или максимум.

Решение, удовлетворяющее условиям задачи и соответствующее намеченной цели, называется *оптимальным планом.*

Линейное программирование служит для выбора наилучшего плана распределения ограниченных ресурсов в целях решения поставленной задачи. Под ресурсами здесь понимаются имеющиеся в наличии силы, средства, запасы.

Линейное программирование применяется в тех случаях, когда математическая модель, соответствующая целевой установке задачи, записывается с помощью линейных соотношений.

В общем виде постановка задачи линейного программирования заключается в следующем.

Условия задачи представляются с помощью системы линейных уравнений или неравенств, выражающих ограни-

чения, налагаемые на использование имеющихся ресурсов:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i;\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m;\\
&j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ m < n;\ x_j > 0,
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.1)$$

где x_j — искомые величины, содержащие решение поставленной задачи;

a_{ij} и b_i — известные постоянные величины, характеризующие условия задачи.

Целевая функция (линейная форма) задается в виде

$$\left.\begin{aligned}
y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n,\\
j = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.2)$$

где c_j — постоянные коэффициенты (коэффициенты стоимости).

Условия задачи (ограничения) могут быть заданы также в виде неравенств. В этих случаях можно привести систему линейных ограничений к виду (3.1.1), вводя в каждое линейное ограничение дополнительные неотрицательные неизвестные: $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$.

Методами линейного программирования решаются задачи распределения однородных сил или средств по объектам или районам действий.

3.1.2. Задача распределения оружия по носителям

А. Постановка задачи.

Пусть m — число различных типов оружия (ракет, снарядов и т. п.), а n — число имеющихся в распоряжении командования носителей этого оружия (кораблей, самолетов и т. п.). При этом известно количество единиц оружия i-го типа ($i=1, 2, \ldots, m$) на j-м носителе a_{ij} ($i=1, 2, \ldots, n$), а также общий ресурс оружия i-го типа b_i для снаряжения им всех носителей. Известно также ожидаемое проти-

водействие противника j-му носителю: c_j — вероятность поражения j-го носителя противником.

Задача заключается в том, чтобы наилучшим (оптимальным) образом распределить имеющийся ресурс оружия по носителям, т. е. найти неизвестные величины x_j — требуемое количество носителей оружия каждого типа.

Целевая установка оптимизации заключается в том, чтобы свести ожидаемое при решении данной задачи противодействие противника к минимуму.

Общая математическая формулировка задачи соответствует условиям (3.1.1) и (3.1.2).

Первая строка системы уравнений (3.1.1)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

где a_{11} — количество единиц оружия типа 1 на первом носителе, a_{12} — на втором носителе и т. д.;
b_1 — общий ресурс оружия типа 1 (для всех носителей);
x_1, x_2 и т. д. — искомое количество носителей оружия типов 1, 2 и т. д.

Вторая строка упомянутой системы уравнений содержит аналогичные величины для оружия типа 2 и т. д. Функция цели соответствует формуле (3.1.1): требуется обратить в минимум величину

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n.$$

В данном примере c_1 — эффективность противодействия противника носителю первого типа, c_2 — второго типа и т. д.

Пример 3.1.1. Четыре типа оружия ($m = 4$) необходимо распределить по шести носителям ($n = 6$); x_j — число носителей оружия данного типа. Распределение оружия по носителям сопряжено с необходимостью учета ряда ограничений, которые могут быть описаны системой четырех уравнений с шестью неизвестными, аналогичными системе (3.1.1):

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_4 &= 16; \\ 2x_2 + x_6 &= 10; \\ x_3 + 2x_4 + 6x_6 &= 76; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_6 &= 24; \\ x_j \geq 0 \ (j &= 1, \ldots, 4). \end{aligned}\right\} \quad (3.1.3)$$

Смысл первого уравнения в нашем примере в том, что оружие типа 1, общий ресурс которого составляет 16 единиц, может размещаться в количестве четырех единиц на носителе первого типа и одной единицы на носителе четвертого типа. Аналогично раскрывается смысл второго и последующих уравнений. Последнее условие говорит о том, что число носителей не может быть отрицательным.

Необходимо определить, какое количество носителей каждого типа следует иметь, для того чтобы общие потери в них были минимальными.

Вероятность поражения носителей задана табл. 3.1.1.

Таблица 3.1.1

Вероятности поражения носителей оружия

Тип носителя оружия, j	1	2	3	4	5	6
Вероятность поражения носителя данного типа (C_j)	0,4	0,5	0,2	0,8	0,6	0,3

В соответствии с табл. 3.1.1 целевая функция, подлежащая оптимизации, примет вид

$$y = 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_4 + 0{,}6x_5 + 0{,}3x_6. \qquad (3.1.4)$$

Решение. Решение задачи сводится к выполнению ограничений, заданных уравнениями (3.1.3), с учетом условия минимизации выражения (3.1.4).

В нашем примере, когда $n - m = 2$, каждое из ограничительных линейных уравнений (3.1.3), а также линейная функция (3.1.4) могут быть представлены геометрически в двухмерном пространстве (на плоскости).

Чтобы представить ограничения и целевую функцию на графике, необходимо выразить все неизвестные через две независимые величины, например x_1 и x_2, соответствующие координатным осям, относительно которых будет производиться построение (рис. 3.1.1).

Из уравнений (3.1.3) следует:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 8x_1 + 12x_2 - 16; \\ x_4 &= 16 - 4x_1; \\ x_5 &= 10 - 2x_2; \\ x_6 &= 24 - 4x_1 - 3x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.5)$$

Целевая функция примет вид

$$y = -2{,}4x_1 + 0{,}8x_2 + 22{,}8. \qquad (3.1.6)$$

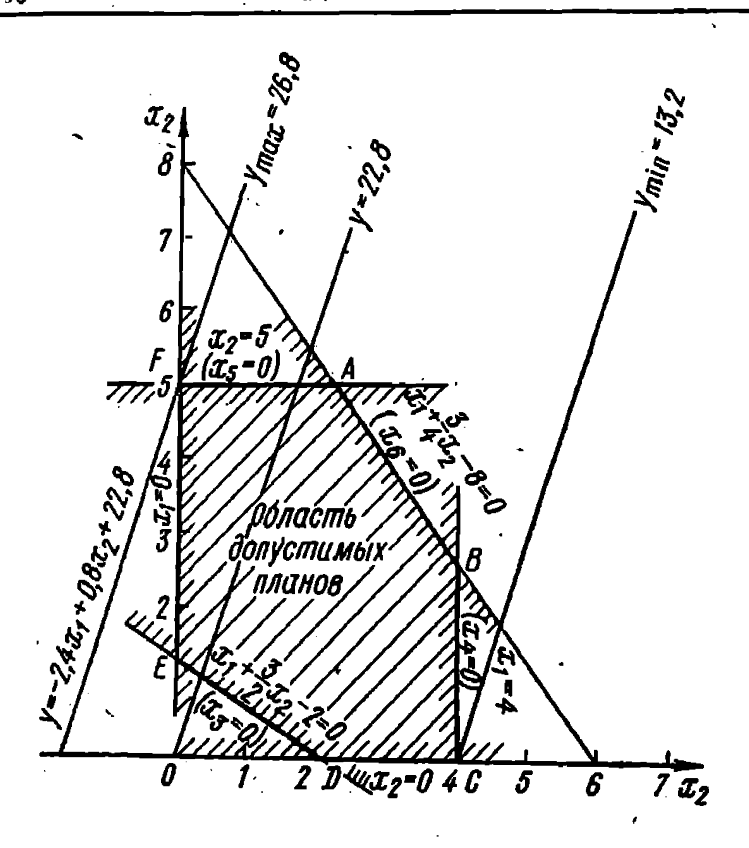


Рис. 3.1.1

Из сопоставления уравнений (3.1.5) и последнего из ограничений (см. 3.1.1) $x_j > 0$ следует:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 > 0; \\ & x_2 > 0; \\ & x_3 = 8x_1 + 12x_2 - 16 > 0; \\ & x_4 = 16 - 4x_1 > 0; \\ & x_5 = 10 - 2x_2 > 0; \\ & x_6 = 24 - 4x_1 - 3x_2 > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.7)$$

Каждому из неравенств (3.1.7) на рис. 3.1.1 соответствует полуплоскость, в пределах которой находятся все допускаемые данным неравенством значения переменной величины x_j ($j = 1$,

2, ..., 6). Так, неравенству $x_1 > 0$ соответствует полуплоскость вправо от оси x_2 (граница ее заштрихована).

Неравенству $x_3 = 8x_1 + 12x_2 - 16 > 0$ соответствует полуплоскость вправо и вверх от линии, соответствующей граничному значению данного неравенства (при $x_3=0$). Уравнение этой линии $x_1 + \frac{3}{2} x_2 - 2 = 0$.

Таким же образом можно построить границы, определяемые другими уравнениями.

Неравенствам (3.1.7) соответствует некоторая область — шестиугольник *ABCDEF*, образованный границами упомянутых выше полуплоскостей. Эта область может быть названа областью допустимых планов, поскольку любая точка в ее пределах отвечает требованиям наложенных ограничений (3.1.3).

Из всех допустимых планов нас интересует оптимальный план, при котором функция цели y достигает минимума.

Целевой функции соответствует семейство параллельных прямых. Рассмотрим одну из них, проходящую через начало координат, что будет иметь место при $y=22{,}8$. При этом $x_2=3x_1$.

Интересующая нас прямая $y=22{,}8$, как видно из рис. 3.1.1, имеет наклон вправо от оси x_2. Задаваясь различными значениями y, получим семейство прямых линий, параллельных прямой $y=22{,}8$, проходящей через точку 0. При этом, чем меньше будет y, тем правее располагается соответствующая прямая.

Поскольку мы добиваемся минимального значения y, то нас будет интересовать прямая, расположенная в наибольшем удалении вправо от прямой $y=22{,}8$ и проходящая через многоугольник *ABCDEF*, т. е. прямая $y_{\min}$.

Единственной точкой, соответствующей оптимальному плану, будет та вершина многоугольника *ABCDEF* (рис. 3.1.1), которая одновременно принадлежит области допустимых планов и отвечает требованию минимизации целевой функции y, — вершина *C*. Из уравнения прямой *BC*, проходящей через точку *C*, следует, что $x_1=4$. Из уравнения прямой *DC*, проходящей через ту же точку, следует, что $x_2=0$.

Подставляя полученные значения $x_1 = 4$ и $x_2 = 0$ в уравнения (3.1.5), определим величины остальных переменных, составляющих оптимальный план: $x_3 = 16$; $x_4 = 0$; $x_5 = 10$; $x_6 = 8$.

Таким образом, оптимальный план будет следующим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 4; \\ x_2 &= 0; \\ x_3 &= 16; \\ x_4 &= 0; \\ x_5 &= 10; \\ x_6 &= 8. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.8)$$

Линейная форма при этом будет минимальной и равной

$$y = -\frac{24}{10} \cdot 4 + \frac{8}{10} \cdot 0 + \frac{228}{10} = \frac{132}{10} = 13{,}2. \qquad (3.1.9)$$

Б. Условия применения.

Рассмотренное геометрическое решение задачи линейного программирования возможно лишь при наличии двух независимых переменных. При трех переменных наглядное представление существенно усложняется, так как в этом случае имеет место некоторый выпуклый многогранник в трехмерном пространстве, соответствующий объему допустимых планов.

При количестве переменных более трех задача теряет геометрическую наглядность, однако идея получения решения, рассмотренного выше, сохраняет смысл.

На практике встречается ряд задач, аналогичных рассмотренному примеру, но требующих максимизации целевой функции (например, вероятности решения задачи, математического ожидания числа пораженных объектов противника и т. п.).

При решении этих задач целевая функция рассчитывается по формуле, аналогичной (3.1.2):

$$y^* = c_1^* x_1 + c_2^* x_2 + \ldots + c_j^* x_j + c_n^* x_n, \qquad (3.1.10)$$

где y^* — целевая функция, подлежащая максимизации. Отличие заключается в том, что знаки перед всеми постоянными коэффициентами меняются на обратные: $c_j^* = -c_j$.

3.1.3. Задача распределения однородных сил или средств

А. Постановка задачи.

В базах $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m$ сосредоточены однородные силы или средства в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ соответственно. Указанные силы (средства) должны быть распределены либо по объектам, либо по районам действия $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_n$ в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_n$ соответственно. При этом суммарные количества сил (средств) в базах и потребности объектов (районов) совпадают:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (3.1.11)$$

Известны также результаты действий либо стоимости распределения сил и средств по любому направлению:

с любой базы A_i на любой объект (в район) B_j. Они обозначаются c_{ij}.

Необходимо отыскать такой план распределения сил или средств, при котором общий результат действий будет наилучшим (эффективность максимальной или стоимость минимальной). Это так называемая транспортная задача линейного программирования.

Функция, подлежащая минимизации (максимизации):

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \qquad (3.1.12)$$

где x_{ij} — количество единиц сил (средств), распределяемых с базы A_i на объекты (в районы) B_j.

Ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad (3.1.13)$$

т. е. с базы A_i берется столько сил (средств), сколько там имеется;

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad (3.1.14)$$

т. е. на любой объект (в район) распределяется столько сил (средств), сколько для него требуется:

$$x_{ij} \geqslant 0, \qquad (3.1.15)$$

т. е. количество сил (средств) не может быть отрицательным.

Пример 3.1.2. Имеются три базы A_1, A_2, A_3, на которых сосредоточены определенные боевые средства (например, ракеты) в количестве:

на базе A_1 — a_1 = 11 единиц;
на базе A_2 — a_2 = 11 единиц;
на базе A_3 — a_3 = 8 единиц.

Имеются также четыре объекта B_1, B_2, B_3 и B_4, которые могут быть уничтожены следующими количествами ракет:

объект $B_1 - b_1 = 5$ единиц;

объект $B_2 - b_2 = 9$ единиц;

объект $B_3 - b_3 = 9$ единиц;

объект $B_4 - b_4 = 7$ единиц.

Стоимость уничтожения различных объектов ракетами с различных баз показана в табл. 3.1.2.

Необходимо найти оптимальный план распределения боевых средств по объектам, обеспечивающий минимум затрат.

Таблица 3.1.2

Стоимость уничтожения ракетами объектов (в условных единицах)

Базы	Объекты			
	B_1 $b_1 = 5$	B_2 $b_2 = 9$	B_3 $b_3 = 9$	B_4 $b_4 = 7$
A_1 $a_1 = 11$	7	8	5	3
A_2 $a_2 = 11$	2	4	5	9
A_3 $a_3 = 8$	6	3	1	2

Решение. Вначале составляется исходный план распределения ракет по объектам. Воспользуемся для его составления формой табл. 3.1.2; перенесем соответствующие стоимости в правые верхние углы клеток и тем самым освободим нижнюю половину клеток для цифр, характеризующих количество ракет (табл. 3.1.3).

Таблица 3.1.3

Первый план (исходный) — оптимальный

Базы	Объекты					
	B_1 $b_1 = 5$	B_2 $b_2 = 9\ (3)$	B_3 $b_3 = 9\ (5)$	(B_4) $b_4 = 7$	a_i	u_{Ai}
(A_1) $a_1 = 11\ (4)$	$5 < 7$	$7 < 8$	5 / 4	3 / 7	11	0
A_2 $a_2 = 11\ (6)$	2 / 5	4 / 6	$2 < 5$	$0 < 9$	11	−3
A_3 $a_3 = 8\ (3)$	$1 < 6$	3 / 3	1 / 5	$-1 < 2$	8	−4
b_j	5	9	9	7	30	
u_{Bj}	5	7	5	3		

Первоначально заполняется первая строка плана. Очевидно, что распределение целесообразно здесь выполнить по тому направлению, где стоимость минимальна,— по направлению A_1B_4. Здесь $c_{14}=3$.

Количество ракет, нацеленных по направлению A_1B_4, устанавливается как минимальное из их общего количества, имеющегося на A_1 и требуемого для B_4: $x_{14} = \min(a_1;\ b_4) = \min(11;\ 7)=7$.

Этим достигается либо полный расход ракет данной базы, либо полное насыщение данного объекта.

В рассматриваемом случае полностью насыщается база B_4, после чего B_4 (для памяти) можно взять в скобки.

После указанной операции на базе A_1 остаются 4 единицы, которые (для памяти) запишем в скобках рядом с цифрой 11. Этот остаток целесообразно направить на объект B_3, поскольку стоимость по направлению A_1B_3 минимальная из оставшихся.

Теперь все ресурсы базы A_1 оказываются исчерпанными (A_1 можно взять в скобки), а на объекте B_3 остается потребность в 5 единицах (эта цифра записывается рядом с 9 в скобках).

Поскольку все ресурсы базы A_1 израсходованы, переходим ко второй строке, где описание операции повторяется, и т. д.

В результате получаем первый, или исходный, план распределения ракет с баз по объектам (табл. 3.1.3).

Чтобы определить, является ли полученный первый план оптимальным, прибегают к проверке его на оптимальность. Вводится понятие потенциала. Под потенциалами понимаются некоторые числа u_{Ai} и u_{Bj}, приписываемые базам и объектам соответственно, сумма которых для клеток, содержащих перевозку, равна ее стоимости:

$$u_{Ai}+u_{Bj}=c_{ij}\,(x_{ij}>0), \qquad (3.1.16)$$

а для тех клеток, где нет распределения, — не более этой стоимости:

$$u_{Ai}+u_{Bj}<c_{ij}\,(x_{ij}<0). \qquad (3.1.17)$$

План, все клетки которого отвечают условиям (3.1.16), (3.1.17), является оптимальным.

Проверим полученный исходный план 3.1.3 на оптимальность. Для этого вначале рассчитаем и внесем в табл. 3.1.3 значения потенциалов баз и объектов.

Примем, что $u_{Ai}=0$, тогда из формулы (3.1.16):

$$u_{B3}=c_{13}-u_{A_1}=5-0=5;$$
$$u_{B4}=c_{14}-u_{A1}=3-0=3;$$
$$u_{A3}=c_{33}-u_{B3}=1-5=-4;$$
$$u_{B2}=c_{32}-u_{A3}=3-(-4)=7;$$
$$u_{A2}=c_{22}-u_{B2}=4-7=-3;$$
$$u_{B1}=c_{21}-u_{A2}=2-(-3)=5.$$

Проверим теперь, соблюдается ли условие потенциальности для свободных клеток. Для этого просуммируем для каждой из них соответствующие потенциалы баз и объектов и сравним полученные значения со стоимостями, проставленными в правых верхних углах клеток.

Суммы потенциалов для свободных клеток называют псевдостоимостями и обозначают $\tilde{c}_{ij}$. Их записывают в левых верхних углах клеток.

Из выражений (3.1.16) и (3.1.17) следует, что для оптимального плана

$$\tilde{c}_{ij}-c_{ij}<0. \qquad (3.1.18)$$

Как видно из табл. 3.1.3, условие (3.1.18) выполняется для всех свободных клеток, следовательно, этот план оптимальный.

В случае если условие оптимальности не соблюдено, план подлежит улучшению до тех пор, пока он не станет оптимальным.

Б. Условия применения.

Задача распределения сил и средств может иметь в качестве постоянных коэффициентов вместо стоимостей эффективности решения поставленной задачи. В нашем примере

это будут вероятности уничтожения объектов ракетами с различных баз.

В этом случае производится максимизация целевой функции в соответствии с формулой (3.1.10).

3.1.4. Задача о перевозках

А. Постановка задачи.

Математическая постановка задачи соответствует рассмотренной в разделе 3.1.3. В этом случае также имеет место так называемая транспортная задача линейного программирования.

Вместо распределения сил и средств из баз по объектам (районам) действий здесь рассматривается перевозка каких-либо ресурсов (грузов) из пунктов отправления (баз) по различным направлениям в пункты назначения (объекты). Условные обозначения пунктов отправления (баз), пунктов назначения (объектов) и стоимостей сохраняются.

Пример 3.1.3. В каждом из четырех пунктов (баз) сосредоточено определенное количество однородного груза a_i, который необходимо доставить на пять объектов, потребности которых заданы. Задана также стоимость перевозок по всем возможным направлениям.

Указанные исходные данные сведены в табл. 3.1.4, построенную аналогично табл. 3.1.3.

Требуется составить оптимальный план перевозок, т. е. найти такие x_{ij}, при которых общая стоимость всех перевозок будет минимальной.

Решение. Как видно из табл. 3.1.4, условия (3.1.11), (3.1.13) и (3.1.16), установленные выше для транспортной задачи, здесь соблюдаются, и, следовательно, можно прибегнуть к методу потенциалов.

Исходный план строится и проверяется на оптимальность аналогично примеру 3.1.2.

В трех клетках A_1B_3, A_2B_1 и A_4B_5 псевдостоимости оказываются большими, чем соответствующие стоимости. Это означает, что условие оптимальности не соблюдается и, следовательно, план неоптимален. Для улучшения плана необходимо ввести перевозку единиц груза в ту из клеток, где имеются наибольшие нарушения условий оптимальности, т. е. где разность между псевдостоимостью и стоимостью наибольшая (клетка A_2B_1).

Чтобы при помещении груза в свободную клетку A_2B_1 не был нарушен общий баланс перевозок, необходимо перераспределение груза выполнять так, чтобы сумма перевозимых ресурсов по всем горизонталям и вертикалям сохранялась.

Достигается это тем, что груз перераспределяется лишь в пределах определенного контура, начало и конец которого находятся в полученной свободной клетке A_2B_1 (см. выделенный контур в табл. 3.1.4).

Таблица 3.1.4

Первый план (исходный)

Пункты отправления	Пункты назначения						
	B_1 $b_1=24$ (12)	B_2 $b_2=15$ (13,4)	B_3 $b_3=10$	B_4 $b_4=20$	B_5 $b_5=7$	a_i	u_{A_i}
A_1 $a_1=22$ (2)	11 < 12	2 8	7<10	20 4	10 > 9	22	0
A_2 $a_2=19$ (9)	• → 6 > 3 ↑ h_1	→ 3 9 − h_1 ↓	10 2	1 < 6	5 < 10	19	−5
A_3 $a_3=19$ (12)	↑ 12 3	0 < 7 ↓	−1<10	−4<3	7 2	19	−8
A_4 $a_4=16$ (12)	8 ↑ 12 − h_1 ←	5 4 + h_1 ← ↓	4 = 4	1 < 3	7 > 5	16	−3
b_j	24	15	10	20	7	76	
u_{B_j}	11	8	7	4	10		

Контур строится таким образом, чтобы выйдя из свободной клетки, возвратиться в нее. Изменение направления контура следует производить в тех клетках, где есть перевозки. Причем необходимо стремиться, чтобы поворотные клетки, лежащие на одной горизонтали и в одной вертикали со свободной клеткой, содержали наиболее дорогие перевозки. Это выгодно, так как количество груза в указанных клетках будет уменьшаться на h единиц для компенсации новой перевозки в клетке A_2B_1. Для соблюдения общего баланса придется добавить h единиц груза в клетку A_4B_2.

Заметим, что в контуре происходит чередование знаков дополнительного груза h в поворотных клетках: в клетке A_4B_1 — плюс, в клетке A_2B_2 — минус и т. д.

Величина дополнительного груза h должна избираться таким образом, чтобы ни одна из перевозок не становилась отрицательной. В данном случае $h_1 = 9$.

После распределения груза в контуре получим второй план, который вследствие более рационального распределения перевозок будет лучше исходного. Этот план показан в табл. 3.1.5.

Общая стоимость перевозок по первому плану составляла

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 8\cdot 2 + 4\cdot 20 + 8\cdot 9 + 2\cdot 10 + 3\cdot 12 + 2\cdot 7 +$$
$$+ 8\cdot 12 + 5\cdot 4 = 309.$$

После улучшения плана стоимость перевозок уменьшилась, как это видно из табл. 3.1.4, на следующую величину:

$$\Delta y = c_{21}h_1 - c_{22}h_1 + c_{42}h_1 - c_{41}h_1 = h_1(c_{21} - c_{22} + c_{42} - c_{41}) =$$
$$= (3 - 3 + 5 - 8)\,9 = -3\cdot 9 = -27.$$

Общая стоимость перевозок по второму плану составила:

$$y_2 = y_1 - \Delta y = 309 - 27 = 282.$$

При проверке второго плана на оптимальность устанавливаем, что условие оптимальности не соблюдено в клетках A_1B_5 и A_4B_3, причем последняя имеет наибольшую разность между псевдо стоимостью и стоимостью.

Строим контур относительно указанной клетки (см. табл. 3.1.5). Величина дополнительной перевозки $h_2 = 3$.

Таблица 3.1.5

Второй план (улучшенный)

Пункты отправления	Пункты назначения						
	B_1 $b_1 = 24$	B_2 $b_2 = 15$	B_3 $b_3 = 10$	B_4 $b_4 = 20$	B_5 $b_5 = 7$	a_i	u_{Ai}
A_1 $a_1 = 22$	11 < 12	8; 2	10 = 10	4; 20	10 > 9	22	0
A_2 $a_2 = 19$	8; ↑ $9 + h_2$	→ 0 < 3	→ 2; $10 - h_2$ ↓	−4 < 6	2 < 10	19	−8
A_3 $a_3 = 19$	3; ↑ 12	0 < 7	2 < 10 ↓	−4 < 3	2; 7	19	−8
A_4 $a_4 = 16$	8; $8 - h_2$ ←	5; 18 ←	7 > 4; h_2 ● ↓	1 < 3	7 > 5	16	−3
b_j	24	15	10	20	7	76	
u_{Bj}	11	8	10	4	10		

После перераспределения груза получим третий план (см. табл. 3.1.6), который экономичнее второго на величину Δy;

$$\Delta y = c_{43} - c_{41} + c_{21} - c_{23} = (4 - 8 + 3 - 2)\,3 = -3\cdot 3 = -9.$$

Стоимость перевозок по третьему плану, таким образом, равна $y_3 = y_2 - \Delta y = 282 - 9 = 273$.

Проверка третьего плана на оптимальность показывает, что он оптимален.

Таблица 3.1.6

Третий план (оптимальный)

Пункты отправления	Пункты назначения						
	B_1 $b_1=24$	B_2 $b_2=15$	B_3 $b_3=10$	B_4 $b_4=20$	B_5 $b_5=7$	a_i	u_{A_i}
A_1 $a_1=22$	$8<12$	8 2	$7<10$	4 20	$7<9$	22	0
A_2 $a_2=19$	3 12	$3=3$	2	$-1<6$	$2<10$	19	−5
A_3 $a_3=19$	3 12	$3<7$	$2<10$	$-1<3$	$2=2$ 7	19	−5
A_4 $a_4=16$	$5<8$	5 13	4 3	$1<3$	$4<5$	16	−3
b_j	24	15	10	20	7	76	
u_{B_j}	8	8	7	4	7		

Б. Условия применения.

В данном разделе рассматривалась оптимизация плана по критерию стоимости. Оптимизация плана по критерию времени дана в разделе 3.1.5.

3.1.5. Задача развертывания сил

А. Постановка задачи.

В каждой из четырех баз находятся однородные силы в количестве a_i единиц. Эти силы необходимо развернуть

на пяти позициях, каждая из которых позволяет разместить b_j единиц. Известно время развертывания сил из каждой базы на любую позицию — t_{ij}.

Необходимо найти оптимальный план развертывания, при котором оно будет выполнено в кратчайшее время.

Математически задача формулируется следующим образом: необходимо найти такие значения

$$x_{ij}\,(i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.1.19)$$

которые удовлетворяют условиям (3.1.13), (3.1.14) и обращают в минимум величину

$$T = \max t_{ij}\,(x_{ij} > 0). \qquad (3.1.20)$$

Здесь T — наибольшее из всех времен t_{ij}, которым соответствуют положительные перемещения.

Пример 3.1.4. Исходные данные примера приведены в табл. 3.1.7.

Решение. Прежде всего составляется исходный план развертывания. Порядок его составления аналогичен изложенному

Таблица 3.1.7

Первый план (исходный)

Базы	Позиции					a_i
	B_1 $b_1 = 24$	B_2 $b_2 = 16$	B_3 $b_3 = 10$	B_4 $b_4 = 20$ (7)	B_5 $b_5 = 8$ (4,1)	
A_1 $a_1 = 24$ (4)	8 $24 - h$	9 —	8 —	10 —	4 $4 + h$	28
A_2 $a_2 = 13$	6	10 —	9	2 13	8	13
A_3 $a_3 = 19$ (8)	8	2 16	7	10 —	8 3	19
A_4 $a_4 = 18$ (11,1)	8 h	5	8 10	2 7	(8) $1 - h$	18
b_j	24	16	10	20	8	78

в примерах 3.1.2 и 3.1.3. В первую очередь заполняются клетки с минимальным временем. Этот план приведен в табл. 3.1.7.

В исходном плане максимальное время развертывания $T_1=8$ ч. Оно соответствует клетке A_4B_5 (время в клетках, где нет развертывания, в расчет не принимается). Для удобства дальнейших расчетов заключим это время в скобки.

Чтобы улучшить первый план, нужно исключить развертывание по невыгодному направлению A_4B_5.

Одновременно с целью сбалансирования плана необходимо изменить количество развертываемых единиц в соответствующих горизонталях и вертикалях. Это сделано в табл. 3.1.7.

При этом необходимо следить, чтобы не заполнять вновь те клетки, в которых $t_{ij} > T_1$. Эти клетки целесообразно прочеркивать.

Величина дополнительного развертывания $h=1$ берется из условия не создавать отрицательных развертываний. Второй, улучшенный план приведен в табл. 3.1.8. Согласно второму плану максимальное время развертывания $T=4$ ч, оно соответствует развертыванию по направлению A_1B_5.

Второй план оптимален по времени, ибо его дальнейшее улучшение путем исключения наиболее невыгодного развертывания (клетка A_1B_5) с использованием описанной выше процедуры невозможно.

Таблица 3.1.8

Второй план (оптимальный)

Базы	Позиции					
	B_1 $b_1=24$	B_2 $b_2=16$	B_3 $b_3=10$	B_4 $b_4=20$	B_5 $b_5=8$	a_i
A_1 $a_1=28$	28 (3)	— (9)	— (6)	— (10)	5 (4)	28
A_2 $a_2=13$	(6)	— (10)	(8)	13 (2)	(3)	13
A_3 $a_3=19$	(8)	16 (2)	(7)	— (10)	3 (8)	19
A_4 $a_4=18$	1 (8)	(5)	10 (8)	7 (2)	— (8)	18
b_j	24	16	10	20	8	78

Б. Условия применения. В данном разделе рассматривается оптимизация плана по критерию времени. Оптимизация плана по критерию стоимости дана в разделе 3.1.4.

3.1.6. Задача о распределении огневых средств с целью поражения максимального числа объектов

А. Постановка задачи.

Имеется m ракет, предназначенных для поражения n целей. Вероятности поражения любой цели каждой из ракет заданы.

Обозначив вероятность поражения i-й ракетой j-й цели p, по аналогии с (3.1.12) можно записать целевую функцию, подлежащую максимизации:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}. \qquad (3.1.21)$$

По смыслу задачи величина y представляет собой математическое ожидание числа пораженных целей при залпе всеми ракетами.

Ограничивающими условиями в данном случае будут:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \ldots, m), \qquad (3.1.22)$$

означающее, что в поражении целей участвуют все ракеты, и

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \ldots, n), \qquad (3.1.23)$$

означающее, что по одной цели стрельба ведется одной ракетой.

Кроме того, очевидно, что

$$x_{ij} \geqslant 0. \qquad (3.1.24)$$

Необходимо распределить ракеты по объектам (целям) таким образом, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей было максимальным.

Пример 3.1.5. Исходные данные примера приведены в табл. 3.1.9.

Таблица 3.1.9

Вероятности поражения целей ракетами

Ракеты	Цели				
	I	II	III	IV	V
№ 1	0,12	0,02	0,50	0,43	0,15
№ 2	0,71	0,18	0,81	0,05	0,26
№ 3	0,84	0,76	0,26	0,37	0,52
№ 4	0,22	0,45	0,83	0,81	0,65
№ 5	0,49	0,02	0,50	0,26	0,27

Решение. Оптимизируемая функция, а также ограничивающие ее условия соответствуют данным, приведеным выше при постановке транспортной задачи (разделы 3.1.3 и 3.1.4). Это дает возможность применить метод потенциалов, несколько его видоизменив.

По аналогии с транспортной задачей под вероятностями поражения понимаются стоимости перевозки; каждой ракете соответствует как бы единичный запас груза, каждая цель нуждается в единице груза.

Исходя из сказанного, представим условие примера 3.1.5 в виде табл. 3.1.10.

Вначале составим исходный план, заполняя в первую очередь те клетки, где эффективность стрельбы выше. Заполнение начинаем с первой строки. Схематическое изображение полученного исходного плана дано на рис. 3.1.2. Для первого плана математическое ожидание числа пораженных целей $y_1 = 0,50 + 0,71 + 0,76 + 0,81 + 0,27 = 3,05$.

Чтобы улучшить исходный план методом потенциалов, прибегнем к следующему искусственному приему. Внесем дополнительные «перевозки», выраженные в величинах ε, в каждую строку плана, одновременно изменив для сбалансирования плана единицы «перевозок», стоящие в соответствующих вертикалях и горизонталях. Для того чтобы это не вызвало искажения плана, величина ε считается сколь угодно малой, и поэтому добавление или исключение ее для плана оказывается несущественным.

Перепишем исходный план с учетом вышеизложенных изменений (табл. 3.1.11).

Таблица 3.1.10

Условия примера 3.1.5.

Ракеты	Цели					
	I $b_1 = 1$	II $b_2 = 1$	III $b_3 = 1$	IV $b_4 = 1$	V $b_5 = 1$	a_i
№ 1 $a_1 = 1$	0,12	0,02	0,50 1	0,43	0,15	1
№ 2 $a_2 = 1$	0,71 1	0,18	0,81	0,05	0,26	1
№ 3 $a_3 = 1$	0,84	0,76 1	0,26	0,37	0,52	1
№ 4 $a_4 = 1$	0,22	0,45	0,63	0,81 1	0,65	1
№ 5 $a_5 = 1$	0,49	0,02	0,50	0,26	0,27	1
b_j	1	1	1	1	1	1

Проверим первый план на оптимальность аналогично тому, как это делалось в предыдущих задачах.

Здесь условие оптимальности не соблюдается в тех клетках, где псевдостоимости меньше, чем стоимости: в клетках № 1—II, № 1—IV, № 1—V, № 2—V, № 3—V. Наибольшая разность в клетке № 1—IV, в которую нужно внести дополнительную «перевозку» h_1. Относительно указанной клетки строим контур. Величина $h_1 = \epsilon$. После перераспределения груза в контуре получим второй план, улучшенный по сравнению с исходным (табл. 3.1.12).

Проверим полученный план на оптимальность. Обнаружив, что он неоптимален, произведем его улучшение путем построения контура относительно свободной клетки № 2—V. При этом $h_2 = \epsilon$. Перейдем к третьему плану (табл. 3.1.13).

Дальнейшее улучшение плана выполняется аналогичным путем. Улучшенные планы сведены в таблицы: четвертый — в табл. 3.1.14, пятый — в табл. 3.1.15, шестой — в табл. 3.1.16.

Последний, шестой план является оптимальным, ибо все разности между псевдостоимостями и стоимостями положительны.

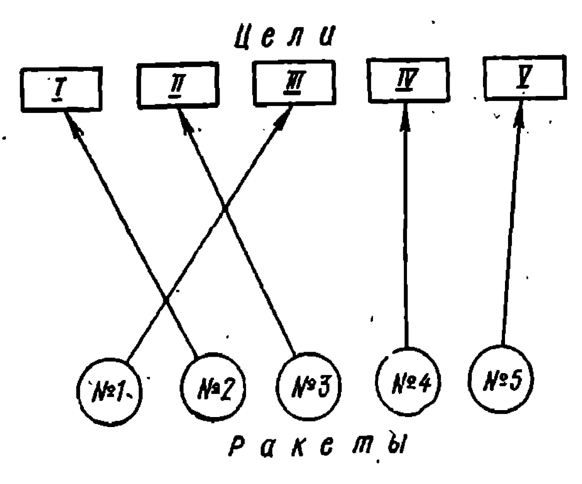


Рис. 3.1.2

Перепишем оптимальный план, исключив из него сколь угодно малые величины ε (табл. 3.1.17).

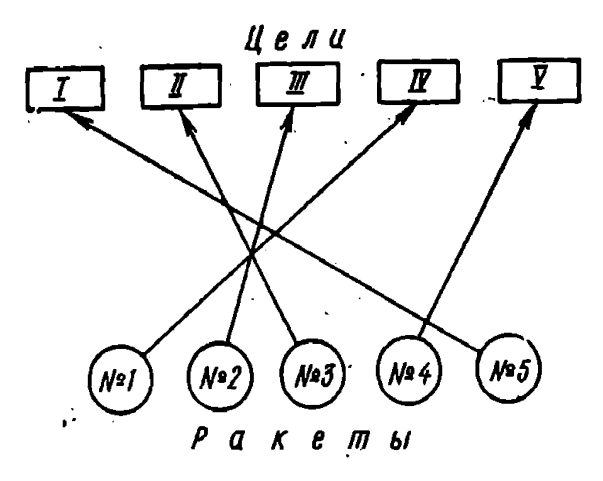


Рис. 3.1.3

Графически оптимальный план поражения целей ракетами показан на рис. 3.1.3.

Таблица 3.1.11

Первый план (исходный)

Ракеты	Цели						
	I	II	III	IV	V	a_i	u_{Ai}
№ 1	0,12 $\varepsilon - h_1$	$-0{,}41 < 0{,}02$	0,50 1	$-0{,}80 < 0{,}43$ h_1	$-0{,}96 < 0{,}15$	$1+\varepsilon$	0
№ 2	0,71 $1 - \varepsilon + h_1$	0,18 $2\varepsilon - h_1$	$1{,}09 > 0{,}81$	$-0{,}21 < 0{,}05$	$-0{,}37 < 0{,}26$	$1+\varepsilon$	0,59
№ 3	$1{,}29 > 0{,}84$	0,76 $1 - 2\varepsilon + h_1$	$1{,}67 > 0{,}26$	0,37 $3\varepsilon - h_1$	$0{,}21 < 0{,}52$	$1+\varepsilon$	1,17
№ 4	$1{,}73 > 0{,}22$	$1{,}2 > 0{,}45$	$2{,}11 > 0{,}83$	0,81 $1 - 3\varepsilon$	0,65 4ε	$1+\varepsilon$	1,61
№ 5	$1{,}35 > 0{,}49$	$0{,}82 > 0{,}02$	$1{,}73 > 0{,}50$	$0{,}43 > 0{,}26$	0,27 $1+\varepsilon$	$1+\varepsilon$	1,23
b_j	1	1	1	1	$1+5\varepsilon$	$5+5\varepsilon$	
u_{Bj}	0,12	−0,41	0,50	−0,80	−0,96		

Таблица 3.1.12

Второй план (улучшенный)

Ракеты	Цели I	II	III	IV	V	a_i	u_{Ai}
№ 1	1,35 > 0,12	0,82 > 0,02	0,50 1	0,43 ε	0,27 > 0,15	$1+\varepsilon$	0
№ 2	0,71 1	0,81 $\varepsilon - h_2$	*− 0,14 < 0,81*	*− 0,21 < 0,05*	−0,37<0,26 h_2	$1+\varepsilon$	−0,64
№ 3	1,29 > 0,84	0,76 $1-\varepsilon+h_2$	0,44 > 0,26	0,37 $2\varepsilon - h_2$	*0,21 < 0,52*	$1+\varepsilon$	−0,06
№ 4	1,73 > 0,22	1,2 > 0,45	0,88 > 0,83	0,81 $1-3\varepsilon+h_2$	0,65 $4\varepsilon - h_2$	$1+\varepsilon$	0,38
№ 5	1,35 > 0,49	0,82 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1+\varepsilon$	$1+\varepsilon$	0
b_j	1	1	1	1	$1+5\varepsilon$	$5+5\varepsilon$	
u_{Bj}	1,35	0,82	0,50	0,43	0,27		

Таблица 3.1.13

Третий план (улучшенный)

Ракеты	Цели						
	I	II	III	IV	V	a_i	u_{Ai}
№ 1	0,72 > 0,12	0,82 > 0,02	0,50 $1-h_3$	0,43 $\varepsilon+h_3$	0,27 > 0,15	$1+\varepsilon$	0
№ 2	0,71 1	0,81 > 0,18	0,49 < 0,81 h_3	0,42 > 0,05	0,26 $\varepsilon-h_3$	$1+\varepsilon$	−0,01
№ 3	0,66 < 0,84	0,76 1	0,44 > 0,26	0,37 ε	0,21 < 0,52	$1+\varepsilon$	−0,06
№ 4	1,10 > 0,22	1,2 > 0,45	0,88 > 0,83	0,8 $1-2\varepsilon-h_3$	0,65 $3\varepsilon+h_3$	$1+\varepsilon$	0,38
№ 5	0,72 > 0,49	0,82 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1+\varepsilon$	$1+\varepsilon$	0
b_j	1	1	1	1	$1+5\varepsilon$	$5+5\varepsilon$	
u_{Bj}	0,72	0,82	0,50	0,43	0,27		

Таблица 3.1.14

Четвертый план (улучшенный)

Ракеты	Цели I	II	III	IV	V	a_i	u_{Ai}
№ 1	0,40 > 0,12	0,82 > 0,02	0,50 $1-\varepsilon-h_4$	0,43 $2\varepsilon+h_4$	0,27 > 0,15	$1+\varepsilon$	0
№ 2	0,71 $1-h_4$	1,13 > 0,18	0,81 $\varepsilon+h_4$	0,74>0,05	0,58 > 0,26	$1+\varepsilon$	0,31
№ 3	0,84< 0,84 h_4	0,76 1	0,44 > 0,26	0,37 $\varepsilon-h_4$	*0,21 < 0,52*	$1+\varepsilon$	0,06
№ 4	0,78 > 0,22	1,2 > 0,45	0,88 > 0,83	0,81 $1-3\varepsilon$	0,65 4ε	$1+\varepsilon$	0,38
№ 5	*0,40 < 0,40*	0,82 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1+\varepsilon$	$1+\varepsilon$	0
b_j	1	1	1	1	$1+5\varepsilon$	$5+5\varepsilon$	
u_{Bj}	0,40	0,82	0,50	0,43	0,27		

Таблица 3.1.15

Пятый план (улучшенный)

Ракеты	Цели I	II	III	IV	V	a_i	u_{Ai}
№ 1	0,40 > 0,12	0,32 > 0,02	0,50 $1-2\varepsilon$	0,43 3	0,27 > 0,15	$1+\varepsilon$	0
№ 2	0,71 $1-\varepsilon$	0,63 > 0,18	0,81 2ε	0,74 > 0,05	0,58 > 0,26	$1+\varepsilon$	0,31
№ 3	0,84 ε	0,76 1	0,94 > 0,26	0,87 > 0,37	0,71 > 0,52	$1+\varepsilon$	0,44
№ 4	0,78 > 0,22	0,70 > 0,45	0,88 > 0,83	0,81 $1-3\varepsilon$	0,65 4ε	$1+\varepsilon$	0,38
№ 5	*0,40 < 0,49* h_ε	0,32 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1+\varepsilon$	$1+\varepsilon$	0
b_j	1	1	1	1	$1+5\varepsilon$	$5+5\varepsilon$	
u_{Bj}	0,40	0,32	0,50	0,40	0,27		

Таблица 3.1.16

Шестой план (оптимальный)

Ракеты	Цели I	II	III	IV	V	a_i	u_{Ai}
№ 1	0,40 > 0,12	0,32 > 0,02	0,50 ε	0,43 1	0,18 > 0,15	1 + ε	0
№ 2	0,71 2ε	0,63 > 0,18	0,81 1 − ε	0,74 > 0,05	0,49 > 0,26	1 + ε	0,31
№ 3	0,84 ε	0,76 1	0,94 > 0,26	0,87 > 0,37	0,62 > 0,52	1 + ε	0,44
№ 4	0,87 > 0,22	0,79 > 0,45	0,97 > 0,83	0,90 > 0,81	0,65 1 + ε	1 + ε	0,48
№ 5	0,49 1 − 3ε	0,41 > 0,02	0,59 > 0,50	0,52 > 0,26	0,27 4ε	1 + ε	0,09
b_j	1	1	1	1	1 + 5ε	5 + 5ε	
u_{Bj}	0,40	0,32	0,50	0,43	0,18		

Таблица 3.1.17

Оптимальный план поражения целей ракетами

Ракеты	Цели				
	I	II	III	IV	V
№ 1				1	
№ 2			1		
№ 3		1			
№ 4					1
№ 5	1				

Б. Условия применения.

В данном разделе рассматривается распределение ракет по целям в том случае, когда по одной цели стреляет одна ракета. В случае если поражение целей предусматривает возможность применения по каждой из них более одной ракеты, используется метод оптимизации, приведенный в разделе 3.1.3.

3.1.7. Задача выбора временны́х показателей боевых действий в зависимости от возможностей средств обеспечения

А. Постановка задачи.

Постановка задачи соответствует общему виду задач линейного программирования, данному в разделе 3.1.1, — формулы (3.1.1) и (3.1.2).

Пример 3.1.6. Планируется нанесение удара по некоторому объекту тремя различными видами оружия: оружием А в течение 3 мин, оружием Б — в течение 5 мин; оружием В — в течение 4 мин.

Возможности средств обеспечения стрельбы таковы, что при применении оружия А в течение 3 мин, оружия Б в течение 2 мин и оружия В в течение 4 мин общее количество залпов не должно превышать 15; при применении оружия А в течение 2 мин и оружия В в течение 3 мин общее количество залпов не должно превышать 8. Кроме того, для преодоления противодействия противника необходимо, чтобы количество залпов, производимых оружием А в течение 3 мин, превышало количество залпов, производимых оружием В за 1 мин, не менее чем на 5 мин.

Требуется рассчитать необходимый темп стрельбы (количество залпов в 1 мин) всеми видами оружия, при котором общее ко-

личество залпов в ударе будет наибольшим, т. е. необходимо найти неизвестные x_1, x_2, x_3 — темп стрельбы оружием вида А, Б и В соответственно, обращающий в максимум целевую функцию:

$$y = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \qquad (3.1.25)$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &< 15; \\ 2x_1 + 3x_2 &< 8; \\ 3x_1 - x_3 &< 5. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.26)$$

Решение. Применим к данной задаче так называемый симплекс-метод. Перейдем от системы неравенств (3.1.26) к системе уравнений (3.1.27). Для этого введем по числу ограничений дополнительные неизвестные x_4, x_5 и x_6 и преобразуем систему (3.1.26) таким образом, чтобы привести ее к виду (3.1.1). Одновременно, вычитая из первого неравенства третье, получим:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8; \\ 2x_2 + 5x_3 \qquad + x_5 &= 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad + x_6 &= 15. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.27)$$

В качестве исходного плана будет следующий:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0; \\ x_2 &= 0; \\ x_3 &= 0; \\ x_4 &= 8; \\ x_5 &= 10; \\ x_6 &= 15. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.28)$$

Соответствующая этому плану целевая функция равна

$$y = 3\cdot 0 + 5\cdot 0 + 4\cdot 0 = 0. \qquad (3.1.29)$$

Приступаем к первому шагу решения.

Выпишем матрицы, необходимые для вычислений:

$$A = \begin{bmatrix} 230100 \\ 025010 \\ 324001 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix};$$

$$S = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Разобьем матрицы A, X и C на подматрицы (клетки). В качестве исходного базиса здесь можно принять переменные x_4, x_5 и x_6:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X_S = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix};$$

$$C_0 = [354], \quad C_S = [000].$$

Для проверки исходного плана на оптимальность воспользуемся так называемым ***критериальным вектором*** (D).

Критериальным называется вектор, обладающий следующим свойством: если хотя бы один из входящих в него элементов положителен, то соответствующий план неоптимален; наличие в составе критериального вектора только отрицательных или равных нулю элементов говорит об оптимальности плана.

Критериальный вектор рассчитывается по формуле

$$D = C_0 - C_S R. \tag{3.1.30}$$

Применительно к исходному плану критериальный вектор равен

$$D = C_0 = (8,\ 5,\ 4).$$

Так как все элементы, входящие в данный критериальный вектор, положительны, исходный план (3.1.28) неоптимален.

Переходим ко второму шагу решения.

Из выражения (3.1.30) находим наибольший коэффициент 5, соответствующий переменной x_2. Эта переменная и должна быть введена в базис. Определим величину x_2. Она находится из сопоставления столбца матрицы A_0, соответствующего этой переменной, с матрицей X_S; при этом определяется наименьшее отношение положительных элементов матрицы A_0 к соответствующим элементам столбца X_S:

$$x_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} 3x_2 < 8; & x_2 < 8/3; \\ 2x_2 < 10; & x_2 < 5; \\ 2x_2 < 15; & x_2 < 15/2. \end{matrix}$$

Наименьшее положительное значение $x_2 = 8/3$. Оно выводится из базиса.

Исходный план решения нашей задачи, а также произведенный выбор переменной для ввода в базис можно в компактной форме записать следующим образом:

Номера столбцов

		C_S	базис	1	2	3	4	5	6	0
Номера строк	1	0	x_4	2	3	0	1	0	0	8
	2	0	x_5	0	2	5	0	1	0	10
	3	0	x_6	3	2	4	0	0	1	15
C				3	5	4	0	0	0	
Решение: Первый план (исходный)				0	0	0	8	10	15	$y = 0$.

Критерий D: 3 5 4 — — —
— ↑ — 8/3 5 15/2.
↓

Стрелками обозначены ввод в базис и вывод из него.

Значения других переменных рассчитываются по формулам:

$$A_S^{-1} = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix};$$

$$B = A_S^{-1} S = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix};$$

$$R = A_S^{-1} A_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 230 \\ 025 \\ 324 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ 025 \\ 324 \end{bmatrix};$$

$$R_{x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$x_5 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} - \frac{8}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 16/3 \\ 16/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14/3 \\ 29/3 \end{bmatrix}.$$

Получим следующие значения переменных для второго, улучшенного допустимого плана:

$$x_1 = 0; \quad x_4 = 0;$$
$$x_2 = 8/3; \quad x_5 = 14/3;$$
$$x_3 = 0; \quad x_6 = 29/3.$$

Значение линейной формы для второго плана равно

$$y = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 8/3 + 4 \cdot 0 = 40/3 = 13{,}3.$$

Проверим полученный второй план на оптимальность с помощью критериального вектора.

После введения в базис переменной x_2 на место переменной x_4 новые значения X_0 и X_S будут:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X_S = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 14/3 \\ 29/3 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие им значения A_0, A_S, C_0 и C_S будут:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 210 \\ 005 \\ 304 \end{bmatrix}; \quad A_S = \begin{bmatrix} 300 \\ 210 \\ 201 \end{bmatrix}; \quad C_0 = [304]; \quad C_S = [500].$$

$$A_S A_S^{-1} = \begin{bmatrix} 300 \\ 210 \\ 201 \end{bmatrix} A_S^{-1} = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix};$$

$$A_S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R = A_S^{-1} A_0 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 210 \\ 005 \\ 304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 5 \\ 5/3 & -2/3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$D = [304] - [500] \times \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 5 \\ 5/3 & -2/3 & 4 \end{bmatrix} = [304] - [10/3 \;\; 5/3 \;\; 0] =$$

$$= [-1/3 \;\; -5/3 \;\; 4].$$

Поскольку не все элементы критериального вектора стали равны нулю или меньше нуля, то второй план не является оптимальным и подлежит дальнейшему улучшению.

Процесс и результаты вычисления второго плана могут быть представлены в виде компактной формы следующим образом. Как было показано выше, наибольший положительный элемент критериального вектора равен 5. Этот элемент соответствует второму столбцу формы исходного плана, который должен быть введен в базис.

С другой стороны, наименьшее положительное оптимальное отношение значений переменных к коэффициентам при них равно $8/3$. Оно соответствует четвертому столбцу формы исходного плана, который должен быть выведен из базиса.

Задача введения в базис столбца второго вместо столбца четвертого исходного плана сводится к тому, чтобы путем эквивалентных преобразований соответствующих матриц получить на месте второго столбца цифры, соответствующие четвертому столбцу. Это достигается следующими приемами:

— определяется ведущий элемент столбца, вводимого в базис, т. е. та из его цифр, которая стоит в той же строке, что и единица в столбце четвертом (в нашем примере цифра 3);

— элементы строки, содержащей ведущий элемент (в нашем примере первой строки), делятся на него, в результате получаем:

Номера столбцов

1 2 3 4 5 6 0

Первая строка: 2/3 1 0 1/3 0 0 8/3;

— производятся необходимые дальнейшие преобразования; чтобы получить во втором столбце нули во второй и третьей строках, вычитаем удвоенную первую строку из второй и третьей строк.

Форма, соответствующая второму плану, будет иметь вид

		Номера столбцов							
	C_S базис	1	2	3	4	5	6		0
Номера строк 1	5 x_2	2/3	1	0	1/3	0	0		8/3
2	0 x_5	−4/3	0	5	−2/3	1	0		14/3
3	0 x_6	5/3	0	4	−2/3	0	1		29/3
	C	3	5	4	0	0	0		
Решение. Второй план:		0	8/3	0	0	14/3	29/3		$y = 13{,}3$.
Критерий D:			−1,3		4 ↑	−5/3.			

и т. д.

Форма, соответствующая оптимальному плану, будет иметь вид

C_S базис							
5 x_2	0	1	0	15/41	8/41	−10/41	50/41
4 x_3	0	0	1	−6/41	5/41	4/41	62/41
3 x_1	1	0	0	−2/41	−12/41	15/41	89/41
	3	5	4	0	0	0	
Решение. Четвертый план (оптимальный)	89/41	50/41	62/41	0	0	0	$y = 18{,}7$
Критерий D:				−45/41	−24/41	−11/41.	

Последний план является оптимальным, так как все элементы критериального вектора отрицательны.

Таким образом, чтобы получить наибольшее количество залпов в ударе, необходимо иметь следующие значения темпа стрельбы:

— оружием А — 89/41 = 2,2 залпа в минуту;
— оружием Б — 50/41 = 1,2 залпа в минуту;
— оружием В — 62/41 = 1,5 залпа в минуту.

Б. Условия применения.

В данной задаче мы получили нецелочисленное решение — искомое количество залпов в минуту выражается дробным числом. Здесь это не противоречит условиям задачи: темп стрельбы может быть и дробным.

В то же время имеется ряд задач, где результат должен обязательно выражаться целым числом (например, количество ракет, распределенных на определенную цель). В некоторых случаях допускается округление дробного результата до ближайшего целого числа. Вместе с тем в ряде задач подобное округление не дает оптимального результата.

3.2. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.2.1. Общие сведения

Нелинейное программирование (планирование) — математические методы отыскания максимума или минимума функции при наличии ограничений в виде неравенств или уравнений.

Максимизируемая (минимизируемая) функция представляет собой принятый критерий эффективности решения задачи, соответствующий поставленной цели. Он носит название *целевой функции*. Ограничения характеризуют имеющиеся возможности решения задачи. Целевая функция или хотя бы одно из ограничений нелинейны.

Сущность решения задач нелинейного программирования состоит в том, чтобы найти условия, обращающие целевую функцию в минимум или максимум.

Решение, удовлетворяющее условиям задачи и соответствующее намеченной цели, называется *оптимальным планом*.

Нелинейное программирование служит для выбора наилучшего плана распределения ограниченных ресурсов. Условия задачи представляются с помощью системы нелинейных уравнений или неравенств, выражающих ограничения, налагаемые на использование имеющихся ресурсов:

$$\left.\begin{array}{l} z_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0; \\ z_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0; \end{array}\right\} \qquad (3.2.1)$$

при $x_i > 0$,

где $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — соответствующие функции, характеризующие условие решения поставленной задачи (ограничения);

x_i — искомые величины, содержащие решение задачи.

Целевая функция задается в виде

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.2.2)$$

Причем по крайней мере одна из функций y, z_1, z_2, ..., z_m — нелинейна.

Методами нелинейного программирования решаются задачи распределения неоднородных сил или средств по объектам или районам действий.

3.2.2. Задача распределения неоднородных сил по районам действий

А. Постановка задачи.

Имеется m разнородных боевых единиц, которые должны производить действия по целям, находящимся в n районах.

Известны вероятности нахождения цели в j-м районе p_j ($j=1, 2, ..., n$), а также вероятности обнаружения цели i-м средством ($i=1, 2, .., m$) в j-м районе ω_{ij}.

Распределение боевых единиц по районам характеризуется параметрами управления h_{ij}:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i\text{-я боевая единица не направляется в } j\text{-й район;} \\ 1, \text{ если } i\text{-я боевая единица направляется в } j\text{-й район.} \end{cases}$$

Необходимо распределить силы по районам действий таким образом (выбрать такие значения h_{ij}), чтобы величина полной вероятности обнаружения цели P была максимальной:

$$P = \sum_{j=1}^{n} p_j \left[1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - h_{ij}\omega_{ij}) \right] = \max. \qquad (3.2.3)$$

Должно выполняться также ограничение:

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (3.2.4)$$

Это ограничение означает, что каждая из m боевых единиц обязательно должна назначаться в какой-либо из районов действий.

Пример 3.2.1. Четыре разнородные поисковые единицы должны осуществлять поиск цели в 4 районах ($m = n = 4$). Вероятности нахождения цели p_j в каждом районе поиска равны:

$$p_1 = 0{,}2;\quad p_2 = 0{,}4;\quad p_3 = 0{,}3;\quad p_4 = 0{,}1.$$

Вероятности обнаружения цели различными поисковыми единицами в каждом из районов ω_{ij} заданы табл. 3.2.1.

Таблица 3.2.1

Вероятности обнаружения цели

№ поисковой единицы, i	№ района поиска, j			
	1	2	3	4
1	0,81	0,65	0,32	0,47
2	0,66	0,51	0,19	0,75
3	0,32	0,17	0,39	0,15
4	0,43	0,46	0,58	0,60

Необходимо распределить силы по районам поиска таким образом, чтобы полная вероятность обнаружения цели P всеми силами во всех районах была максимальной. При этом каждая из единиц должна обязательно назначаться в какой-либо из районов поиска.

Решение. Рассмотрим наиболее простой случай, когда в каждый из районов поиска может быть направлено не более одной поисковой единицы.

При этом

$$\prod_{i=1}^{m} (1 - h_{ij}\omega_{ij}) = 1 - \sum_{i=1}^{m} h_{ij}\omega_{ij} \tag{3.2.5}$$

и

$$P = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} h_{ij} p_i \omega_{ij}. \tag{3.2.6}$$

В нашем случае $m = n$. Решение при этом сводится к составлению матрицы $A = \|p_i\omega_{ij}\|$ и выбору из каждой ее строки и каждого столбца по одному элементу таким образом, чтобы сумма их оказалась наибольшей. Это один из частных случаев задачи линейного программирования.

Вычислительную процедуру удобно выполнить с помощью следующего метода.

Вначале рассчитываются элементы матрицы $A = \| p_i \omega_{ij} \cdot 10^3 \|$:

Районы поиска (столбцы)

$$A = \begin{Vmatrix} 162 & 260 & 96 & 47 \\ 132 & 204 & 57 & 75 \\ 64 & 68 & 117 & 15 \\ 86 & 184 & 174 & 60 \end{Vmatrix}$$

	1	2	3	4	Поисковые единицы (строки)
	162	260	96	47	1
	132	204	57	75	2
	64	68	117	15	3
	86	184	174	60	4

Затем матрица A подвергается эквивалентному преобразованию, для чего:

— в каждом ее столбце отыскивается максимальный элемент и из него вычитаются все элементы этого столбца;

— в каждой строке полученной таким образом матрицы отыскивается минимальный элемент и вычитается из всех элементов этой строки.

Полученная матрица обозначается $A^{(0)}$. В ней в каждой строке и каждом столбце есть хотя бы один нуль.

В первом столбце матрицы $A^{(0)}$ выбирается любой нуль и отмечается звездочкой. Затем просматривается второй столбец и отмечается в нем звездочкой нуль лишь в том случае, если в этой же строке нуля со звездочкой нет, и т. д. по всем столбцам.

Полученные нули со звездочками называются независимыми:

$$A^{(0)} = \begin{Vmatrix} 0^* & 0 & 78 & 28 \\ 30 & 56 & 117 & 0^* \\ 41 & 135 & 0^* & 3 \\ 76 & 76 & 0 & 15 \end{Vmatrix}$$

Далее решение выполняется методом последовательных приближений (итераций). Каждый шаг итерации увеличивает число независимых нулей на единицу. Решение оканчивается тогда, когда число независимых нулей становится равным n. Поскольку в нашей матрице $A^{(0)}$ три независимых нуля, достаточно одной итерации, так как $n = 4$.

Итерация выполняется в такой последовательности:

1) В матрице $A^{(0)}$ (в общем случае в матрице, полученной в результате предыдущей итерации) выделяются знаком (+) столбцы, содержащие независимые нули. Элементы матрицы, лежащие в выделенных столбцах, называются *выделенными* (см. матрицу *а*).

2) Смотрим, есть ли среди невыделенных элементов нули. Если есть, переходим к п. 3, если нет — к п. 5.

3) Над любым невыделенным нулем ставится знак ($'$). Смотрим, есть ли 0^* в строке, содержащей $0'$. Если есть, выделяем знаком (+) эту строку (она называется выделенной) и уничтожаем (обводим кружком) знак выделения над столбцом, содержащим 0^* (см. матрицу *а*). Затем возвращаемся к п. 2. Если нет — переходим к п. 4.

4) Начиная с $0'$, в строке которого на предыдущем шаге не был обнаружен 0^*, строим цепочку с чередованием $0'$ и 0^* до тех пор, пока это возможно. Переход от $0'$ к 0^* совершается по столбцу, а от 0^* к $0'$ — по строке (см. матрицу *в*).

Над нечетными элементами цепочки ставятся звездочки, а над четными они снимаются. При этом количество независимых нулей возрастает на один. Все плюсы и штрихи уничтожаются.

а

⊕		+	+	
0*	0'	78	28	+
<u>30</u>	56	117	0*	
41	135	0*	3	
76	76	0	15	

б

		+	⊕	
0*	0'	118	58	+
0'	26	117	0*	+
11	105	0*	<u>3</u>	
46	46	0	15	

в

		⊕		
0*	0'	111	58	+
0'	26	120	0*	+
8	102	0*	0'	+
40	43	0'	12	

Районы поиска

г

1	2	3	4	Поисковые единицы
0	0*	111	58	1
0*	26	120	0	2
8	102	0	0*	3
43	43	0*	12	4

Если число 0* оказывается меньше n, возвращаемся к п. 1, если равно n — переходим к п. 6.

5) Выбирается минимальный элемент из всех невыделенных (в матрице *а* он подчеркнут). Этот элемент вычитается из всех невыделенных и прибавляется к элементам, находящимся на пересечении выделенных строк и столбцов (см. матрицы *а* и *б*). Далее переходим к п. 2.

б) Устанавливается оптимальное распределение поисковых единиц по районам действий. Оно соответствует тем местам матрицы *г*, где стоят независимые нули.

Вычисляется максимальное значение *P*, равное сумме a_{ij}, стоящих на местах независимых нулей.

Последовательное преобразование матрицы $A^{(0)}$ применительно к данному примеру (матрицы *а*, *б*, *в*, *г*) показано выше.

Положение независимых нулей в матрице *г* дает следующее оптимальное распределение поисковых единиц по районам действий:

		Районы поиска			
		1	2	3	4
Поисковые единицы	1	—	1	—	—
	2	1	—	—	—
	3	—	—	—	1
	4	—	—	1	—

Соответствующая этому распределению максимальная вероятность обнаружения цели равна сумме соответствующих элементов матрицы *A*:

$$p = 0{,}132 + 0{,}260 + 0{,}174 + 0{,}015 = 0{,}581.$$

Б. Условия применения.

Рассмотренный пример относится к случаю, когда $m=n$. Если $m<n$, необходимо ввести $n-m$ фиктивных поисковых единиц с нулевыми возможностями ($\omega_{ij}=0$ для $i>m$), сведя тем самым задачу к рассмотренному случаю.

3.2.3. Задача распределения неоднородных средств по целям

А. Постановка задачи.

Имеется *m* групп разнородных средств, которые должны поразить *n* целей. Каждая группа средств состоит из *N* единиц. Цели характеризуются коэффициентами важности (опасности) p_j и уязвимости ω_{ij}. Под уязвимостью цели здесь понимается вероятность ее поражения.

Распределение средств по целям характеризуется матрицей $A = \|x_{ij}\|$, где x_{ij} — количество средств *i*-го типа, назначаемых на *j*-ю цель,

Необходимо распределить средства по целям таким образом, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей M было максимальным:

$$M=\sum_{j=1}^{n} p_j\left[1-\prod_{i=1}^{m}(1-\omega_{ij})^{x_{ij}}\right]=\max. \qquad (3.2.7)$$

Должны выполняться также ограничения:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=N_i; \quad i=1,2,\ldots,m;\\ x_{ij}>0, \quad i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n.\end{array}\right\} \qquad (3.2.8)$$

Пример 3.2.2. Две группы разнородных средств ПВО ($m=2$) должны поразить 3 воздушные цели ($n=3$). В первой группе средств ПВО 6 единиц ($N_1=6$), во второй — 10 единиц ($N_2=10$). Коэффициенты опасности целей p соответственно равны: $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}5$. Вероятности поражения целей одним средством ПВО первой и второй групп (уязвимости целей ω_{ij}) заданы табл. 3.2.2.

Таблица 3.2.2

Вероятности поражения (уязвимости) целей

№ группы средств ПВО, i	№ цели, j		
	1	2	3
1	0,40	0,10	0,50
2	0,20	0,40	0,20

Необходимо распределить средства ПВО по целям таким образом, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей с учетом их важности было максимальным.

Решение. Поскольку ограничения (3.2.7) и (3.2.8) определяют выпуклую ограниченную область, а функция (3.2.6) вогнута, данная задача относится к классу задач выпуклого программирования и может быть решена с помощью метода возможных направлений. Сущность метода заключается в следующем:

— в области изменения максимизируемой функции определяется исходное допустимое решение, удовлетворяющее ограничительным условиям задачи;

— с помощью специального критерия проверяется, достаточно ли близко полученное решение к оптимальному;

— если полученное отклонение больше требуемого, то путем построения так называемого возможного направления и определения в этом направлении конечного шага получают новое допустимое решение, которое увеличивает значение максимизируемой функции;

— процесс расчетов носит характер последовательных приближений (итераций) и продолжается до тех пор, пока на некотором шаге итерации не будет получено решение, близкое к оптимальному, с требуемой точностью приближения.

Последовательность расчетов:

1) Определяется исходное допустимое решение:

$$A^{(0)} = \left\| x_{ij}^{(0)} \right\|, \tag{3.2.9}$$

где $A^{(0)}$ — матрица, характеризующая исходное распределение средств ПВО по целям.

В качестве исходного (начального) распределения может быть взято любое (в том числе и произвольное) распределение (матрица A^0), не противоречащее ограничительным условиям задачи. Чем это начальное распределение окажется ближе к оптимальному, тем меньше необходимое число итераций. Мы можем здесь воспользоваться приближенным решением этой же задачи, полученным с помощью метода динамического программирования (см. раздел 3.3.5, пример 3.3.4).

Номера целей (столбцы)

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & \\ A^{(0)} = & \left\| \begin{matrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{matrix} \right\| & & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \tag{3.2.10}$$

Номера групп средств ПВО (строки)

Далее осуществляется итеративный процесс; в результате выполнения k итераций получается k-е приближение к оптимальному распределению:

$$A^{(k)} = \left\| x_{ij}^{(k)} \right\|. \tag{3.2.11}$$

2). Определяются компоненты матрицы возможного направления $S^{(k)} = \left\| s_{ij}^{(k)} \right\|$:

$$s_{ij}^{(k)} = \tilde{x}_{ij}^{(k)} - x_{ij}^{(k)}. \tag{3.2.12}$$

Величины $\tilde{x}_{ij}^{(k)}$ находятся с помощью матрицы $y_{ij}^{(k)}$:

$$y_{ij}^{(k)} = p_j a_{ij} \exp\left(- \sum_{l=1}^{m} a_{lj} x_{lj}^{(k)} \right), \tag{3.2.13}$$

где

$$a_{lj} = -\ln(1 - \omega_{lj}). \qquad (3.2.14)$$

В каждой строке матрицы $y_{lj}^{(k)}$ отыскивается максимальный элемент. Положение максимальных элементов и определяет искомые значения $\tilde{x}_{lj}^{(k)}$, равные N_l $(l = 1, 2, \ldots, m)$.

Остальные $x_{lj}^{(k)}$ принимаются равными нулю.

3) Оценивается близость полученного решения к оптимальному. Для этого рассчитывается величина отклонения решения на данном шаге от оптимального решения $\Delta^{(k)}$:

$$\Delta^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} A^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} y_{lj}^{(k)} S_{lj}^{(k)} \right). \qquad (3.2.15)$$

Величина $\Delta^{(k)}$ сравнивается с ε — требуемым отклонением полученного на данном шаге математического ожидания числа пораженных воздушных целей от математического ожидания, соответствующего оптимальному распределению.

Если $\Delta^{(k)} < \varepsilon$ — решение практически оптимально,

если $\Delta^{(k)} > \varepsilon$ — необходимо перейти к п. 4.

4) Находится длина шага λ_k, который необходимо сделать вдоль возможного направления, для того чтобы приблизиться к оптимальному решению. λ_k находится из уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(k)} \exp\left(-\lambda_k \sum_{l=1}^{m} a_{lj} S_{lj}^{(k)} \right) = 0. \qquad (3.2.16)$$

Уравнение (3.2.16) решается по методу Ньютона или по методу половинного деления.

5) Находится новое допустимое решение:

$$A^{(k+1)} = \left\| x_{lj}^{(k+1)} \right\|,$$

где

$$x_{lj}^{(k+1)} = x_{lj}^{(k)} + \lambda_k S_{lj}^{(k)}. \qquad (3.2.17)$$

Далее вычисления повторяются, начиная с п. 2

Результаты расчетов сведены в табл. 3.2.3.

Таблица 3.2.3

Результаты расчетов примера 3.2.2

Номер итерации, k	План распределения, $x_{ij}^{(k)'}$						Отклонение от оптимального решения, $\Delta(k)$	Шаг, λ_k	Математическое ожидание числа пораженных воздушных целей, M
	$x_{11}^{(k)}$	$x_{12}^{(k)}$	$x_{13}^{(k)}$	$x_{21}^{(k)}$	$x_{22}^{(k)}$	$x_{23}^{(k)}$			
0	3	0	3	3	5	2	0,042	0,043	0,9110
1	2,87	0	3,13	2,87	4,79	2,34	0,019	0,053	0,9123
2	2,72	0	3,28	2,72	5,07	2,21	0,015	0,039	0,9129
3	2,48	0	3,52	3,37	4,61	2,02	0,014	0,032	0,9135
4	2,59	0	3,41	3,26	4,79	1,95	0,009	0,020	0,9136

Решение на четвертом шаге, округленное до целых единиц, составляет:

		Средства ПВО	
		1-я группа	2-я группа
Воздушные цели	№ 1	3	3
	№ 2	0	5
	№ 3	3	2

Б. Условия применения.

Полученный результат — оптимальный план распределения разнородных средств ПВО по воздушным целям должен быть переведен в целочисленное решение, для чего соответствующие значения x_{ij} следует округлить в ближайшую сторону.

Количество шагов итерации определено требуемой точностью расчета математического ожидания числа пораженных воздушных целей. Как видно из табл. 3.2.3, при $\varepsilon = 0{,}01$ можно ограничиться четырьмя итерациями, при $\varepsilon = 0{,}02$ достаточно одной итерации.

Расчеты существенно сокращаются и упрощаются при наличии исходного плана, близкого к оптимальному. Поэтому рекомендуется в качестве такого плана брать приближенный результат решения подобной задачи, выполненный методом динамического программирования (см. раздел 3.3.5 и пример 3.3.4).

3.2.4. Задача распределения разнородных сил или средств для нанесения удара по объекту, оказывающему противодействие

А. Постановка задачи.

Два рода ударных сил (средств) готовят нанесение удара по объекту. Известны вероятности поражения объекта ударной единицей первого и второго рода (p_1 и p_2), а также коэффициенты потерь ударных сил (c_1 и c_2).

Необходимо найти оптимальное значение наряда сил первого и второго рода $\left(x_1^{\text{опт}} \text{ и } x_2^{\text{опт}}\right)$, обеспечивающее заданную вероятность поражения объекта $W_з$ и обращающее в минимум потери y:

$$W_з = 1 - (1 - p_1)^{x_1 - a_1} (1 - p_2)^{x_2 - a_2}, \qquad (3.2.18)$$

где x_1 и x_2 — количество единиц сил первого и второго рода;

a_1 и a_2 — минимальный возможный наряд сил первого и второго рода;

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2. \qquad (3.2.19)$$

Должны выполняться также ограничения:

$$\left.\begin{aligned} a_1 < x_1 < \beta_1; \\ a_2 < x_2 < \beta_2, \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.20)$$

где β_1 и β_2 — максимальный возможный наряд сил первого и второго рода.

Пример 3.2.3. Ударные силы двух родов должны нанести удар по объекту. Вероятности поражения объекта равны: $p_1=0{,}5$; $p_2=0{,}3$. Коэффициенты потерь равны: $c_1=0{,}8$; $c_2=0{,}4$. Пределы количества сил первого рода: $a_1 = 1$, $\beta_1 = 7$. Пределы количества сил второго рода: $a_2 = 2$, $\beta_2 = 10$. Заданная вероятность поражения объекта $W_з = 0{,}9$.

Необходимо распределить ударные силы таким образом, чтобы при заданной вероятности поражения и ограничениях при выделении наряда сил потери в своих силах были минимальными.

Решение. Данную задачу удобно решать так называемым методом приращений. Сущность метода заключается в следующем:

— минимизация целевой функции 3.2.19 достигается методом последовательных приближений (итераций);

— в качестве исходного набора значений искомой переменной $X_0 = (x_{10}, x_{20})$ берутся их минимальные значения (a_1, a_2);

— на первом шаге итерации каждому из аргументов дается определенное приращение (Δx_{10} и Δx_{20}), вытекающее из ограничения (3.2.18); полученные в результате переменные образуют «чистый» набор $X_1 = (x_{11}, x_{22})$;

— из X_0 и X_1 составляются два «комбинированных» набора, в каждом из которых один из аргументов соответствует новому значению, а второй оставлен прежним;

— на втором шаге с помощью приращений наращиваются значения аргументов комбинированных наборов исходя из ограничения (3.2.18), снова получаются «чистые» и новые комбинированные наборы и т. д.;

— на каждом шаге для чистых и комбинированных наборов переменных вычисляются значения целевой функции y; минимальное значение целевой функции на k-м шаге по всем чистым наборам данного и предшествующих шагов обозначается $\bar{y}_k$, а по всем комбинированным — через $\underline{y}_k$;

— итеративный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$\bar{y}_k - \underline{y}_k < \varepsilon, \tag{3.2.21}$$

где ε — требуемая точность решения задачи (оценка потерь).

Последовательность расчетов:

1) Составляется исходный набор аргументов:

$$X_0 = (x_{10}; x_{20}) = (a_1; a_2) = (1; 2).$$

2) Рассчитывается приращение аргументов Δx, которые принимаются обратно пропорциональными потерям:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{10} &= \frac{t}{c_1} = \frac{t}{0,8} = 1,25t; \\ \Delta x_{20} &= \frac{t}{c_2} = \frac{t}{0,4} = 2,5t, \end{aligned}\right\} \tag{3.2.22}$$

где t — параметр, соответствующий ограничению (3.2.18).

Для расчета величины t подставим в формулу (3.2.18) соответствующие значения:

$$W_3 = 0,9 = 1 - (1 - 0,5)^{x_1 - 1} (1 - 0,3)^{x_2 - 2};$$

$$z = 0,1 - 0,5^{x_1 - 1} \cdot 0,7^{x_2 - 2} > 0,$$

где z — неубывающая функция, соответствующая данному ограничению.

Параметр t определяется из граничного условия, когда $z=0$; при этом соответствующие показатели степени принимают значения Δx_{10} и Δx_{20}:

$$z = 0,1 - 0,5^{1,25t} \cdot 0,7^{2,5t} = 0. \qquad (3.2.23)$$

Из (3.2.23) следует, что $t = 1,21$, а из (3.2.22):

$$\Delta x_{10} = 1,25 \cdot 1,21 = 1,51;$$

$$\Delta x_{20} = 2,5 \cdot 1,21 = 3,02.$$

3) Выполняется первый шаг итерации:

$$x_{11} = a_1 + \Delta x_{10} = 1 + 1,51 = 2,51;$$

$$x_{12} = a_2 + \Delta x_{20} = 2 + 3,02 = 5,02.$$

Получается чистый набор $X = (x_{11};\ x_{12}) = (2,51;\ 5,02)$.

Составляются два комбинированных набора (1,0; 5,02) и (2,51; 2,0).

4) Рассчитываются по формуле (3.2.19) значения целевой функции для чистого и комбинированных наборов, причем из двух последних выбирается минимальное:

а) для чистого набора $\bar{y}_1 = 0,8 \cdot 2,51 + 0,4 \cdot 5,02 = 4,02$;

б) для комбинированных наборов:

— первого $y_1 = 0,8 \cdot 1 + 0,4 \cdot 5,02 = 2,81$;

— второго $y_1 = 0,8 \cdot 2,51 + 0,4 \cdot 2,0 = 2,81$;

$$\underline{y}_1 = \min(2,81;\ 2,81) = 2,81.$$

Оценивается $\bar{y}_1 - \underline{y}_1 = 4,02 - 2,81 = 1,21$.

Решение на первом шаге, соответствующее данной точности в оценке потерь, берется из чистого набора и составляет: $x_1 = 2,51$; $x_2 = 5,02$ или приближенно $x_1 \approx 3$; $x_2 \approx 5$.

Осуществляется второй шаг итерации аналогично п. 3. Получается два чистых набора (1,87; 6,77) и (3,40; 3,79), из которых составляется четыре комбинированных: (1,0; 6,77), (1,87; 5,02), (2,51; 3,79) и (3,40; 2,0).

5) Рассчитываются значения целевой функции для всех чистых наборов второго шага и выбирается минимальная величина ее на втором и предыдущем, первом, шаге:

— первый набор $y_2 = 0,8 \cdot 1,87 + 0,4 \cdot 6,77 = 4,20$;

— второй набор $y_2 = 0,8 \cdot 3,40 + 0,4 \cdot 3,79 = 4,24$;

$$\bar{y}_2 = \min(4,02;\ 4,20;\ 4,24) = 4,02.$$

Рассчитываются значения целевой функции для всех комбинированных наборов второго шага и выбирается минимальная ее величина:

— первый набор $y_2 = 0,8 \cdot 1,0 + 0,4 \cdot 6,77 = 3,50$;
— второй набор $y_2 = 0,8 \cdot 1,87 + 0,4 \cdot 5,02 = 3,51$;
— третий набор $y_2 = 0,8 \cdot 2,51 + 0,4 \cdot 3,79 = 3,53$;
— четвертый набор $y_2 = 0,8 \cdot 3,40 + 0,4 \cdot 2,0 = 3,52$;

$$\underline{y}_2 = \min(3,50;\ 3,51;\ 3,53;\ 3,52) = 3,50.$$

Оценивается $\bar{y}_2 - \underline{y}_2 = 4,02 - 3,50 = 0,52$.

Решение на втором шаге, соответствующее данной точности в оценке потерь, берется из того чистого набора, для которого y меньше, и составляет: $x_1 = 1,87$; $x_2 = 6,77$ или приближенно $x_1 \approx 2$; $x_2 \approx 7$.

В последующих шагах разность $\bar{y}_k - \underline{y}_k$ продолжает убывать. При этом необходимо следить, чтобы величина требуемого наряда сил первого и второго рода не превышала величин β_1 и β_2 соответственно. Если наряд получается более указанных пределов, следует остановиться на его предельных значениях.

Если ограничиться точностью в оценке потерь $\varepsilon = 1\%$ от величины y ($\varepsilon = 0,04$), то для решения задачи потребуется еще три шага.

Б. Условия применения.

Полученный результат — оптимальный план распределения разнородных ударных сил по объекту удара должен быть переведен в целочисленное решение, для чего соответствующие значения x_{ij} следует округлить в ближайшую сторону.

Метод приращений применим для решения задач, в которых нелинейная целевая функция и ограничения могут быть любой сложности, лишь бы функция y была неубывающей, а z — неубывающей либо невозрастающей. Число ограничений может быть и больше числа переменных. Область изменения переменных должна лежать в заданных пределах.

3.3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.3.1. Общие сведения

Динамическое программирование (планирование) служит для выбора наилучшего плана выполнения многоэтапных действий. Для многоэтапных действий характерно про-

текание во времени. Кроме действий, естественно носящих многоэтапный характер, например, перспективное планирование, в ряде задач прибегают к искусственному расчленению на этапы, с тем чтобы сделать возможным применение метода динамического программирования.

В общем виде постановка задачи динамического программирования сводится к следующему.

Имеется некоторая управляемая операция (целенаправленное действие), распадающаяся (естественно или искусственно) на m шагов (этапов). На каждом шаге осуществляется распределение и перераспределение сил и средств, участвующих в операции, с целью улучшения ее результата в целом. Эти распределения в динамическом программировании называются *управлениями операцией* и обозначаются буквой u. Эффективность операции в целом оценивается тем же показателем, что и эффективность ее управления — $W(u)$. При этом эффективность управления $W(u)$ зависит от всей совокупности управлений на каждом шаге операции:

$$W = W(u) = W(u_1, u_2, \ldots, u_m). \qquad (3.3.1)$$

Управление, при котором показатель W достигает максимума, называется *оптимальным управлением.*

Оптимальное управление многошаговым процессом состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_m). \qquad (3.3.2)$$

Задача динамического программирования — определить оптимальное управление на каждом шаге u_i ($i=1, 2, \ldots, m$) и тем самым оптимальное управление всей операцией в целом.

В большинстве практических задач принимается, что показатель эффективности операции в целом W представляет собой сумму эффективностей действий на всех этапах (шагах) операции:

$$W = \sum_{i=1}^{m} \omega_i, \qquad (3.3.3)$$

где ω_i — эффективность операции на i-м шаге. При этом в случае оптимального управления

$$W = \max \sum_{i=1}^{m} \omega_i. \qquad (3.3.4)$$

Сущность решения задач динамического программирования заключается в следующем:

— оптимизация производится методом последовательных приближений (итераций) в два круга; вначале от последнего шага операции к первому, а затем, наоборот, от первого к последнему;

— на первом круге, идя от последующих шагов к предыдущим, находится так называемое *условное оптимальное управление*. Условное оптимальное управление выбирается таким, чтобы все предыдущие шаги обеспечивали максимальную эффективность последующего шага. Иными словами, на каждом шаге ищется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение операции. Этот принцип выбора управления называется *принципом оптимальности*;

— так продолжается до первого шага. Но поскольку первый шаг не имеет предыдущего, то полученное для него условное оптимальное управление теряет свой условный характер и становится просто оптимальным управлением, которое мы ищем;

— второй круг оптимизации начинается с первого шага, для которого оптимальное управление известно. Имея для всех шагов после него условные оптимальные управления, мы тем самым знаем, что необходимо делать на каждом последующем шаге. Это дает нам возможность последовательно переходить от условных к оптимальным управлениям для всех последующих шагов, что обеспечивает оптимальность операции в целом.

3.3.2. Задача оптимальной загрузки транспортного средства

А. Постановка задачи.

Имеется m типов различных грузов, которыми необходимо загрузить транспортное средство (корабль, самолет, автомобиль) таким образом, чтобы общая ценность груза

была максимальной. Ценность груза является функцией от грузоподъемности транспортного средства:

$$W = f(G). \qquad (3.3.5)$$

Известны массы грузов i-го типа p_i и их стоимости c_i. Необходимо загрузить транспортное средство таким образом, чтобы общая ценность груза была максимальной:

$$W = f_m(G) = \max \sum_{i=1}^{m} x_i c_i, \qquad (3.3.6)$$

где x_i — число предметов груза i-го типа, загружаемых в транспортное средство; x_i выступает здесь в качестве управления ($u_i = x_i$).

Ограничивающими условиями являются:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i p_i \leqslant G \qquad (3.3.7)$$

и

$$x_i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (3.3.8)$$

Первое условие требует, чтобы общая масса груза не превышала грузоподъемности транспортного средства, а второе — чтобы предметы, составляющие груз различных типов, были неделимы.

Пример 3.3.1. Самолет грузоподъемностью $G = 83$ условных единицы груза предполагается загрузить четырьмя типами груза ($m = 4$). Масса и стоимость груза i-го типа в условных единицах заданы табл. 3.3.1.

Необходимо загрузить самолет таким образом, чтобы общая ценность груза была максимальной.

Решение. В данном примере нет естественного разделения операции загрузки на шаги. Такое разделение в интересах решения задачи целесообразно ввести искусственно, принимая за шаги загрузку самолета предметами различных типов. Таких шагов будет четыре.

На первом круге оптимизация начинается с четвертого типа груза — четвертого шага. При этом принимается, что самолет загружают только предметами четвертого типа. В этих условиях максимальная ценность груза на четвертом шаге ω_4 равна

$$\omega_4 = f_4(G) = \max \{x_4 c_4\} \qquad (3.3.9)$$

Таблица 3.3.1

Масса и стоимость груза i-го типа (в условных единицах)

Показатель, условные единицы	Тип груза, i			
	1	2	3	4
p_i	10	16	22	24
c_i	20	50	85	96

при условиях, вытекающих из (3.3.7) и (3.3.8): $x_4 p_4 < G$ и $x_4 = 0, 1, 2, \ldots$;

Из первого условия следует, что

$$x_4 < \frac{G}{p_4}; \quad x_4 < \frac{83}{24}; \quad x_4 < 3{,}46.$$

Из второго условия следует, что x_4 может быть только целым числом, поэтому в качестве x_4 берется целая часть полученной дроби: $x_4 = | G/p_4 | = | 3{,}46 | = 3$.

Это и есть условное оптимальное управление на последнем, четвертом шаге $u_4 = x_4 = 3$.

Максимальная ценность груза при такой загрузке по формуле (3.3.9) будет равна $\omega_4 = f_4(G) = \max\{3 \cdot 96\} = 288$.

Переходим к предыдущему, третьему шагу, на котором самолет загружается кроме предметов четвертого типа также и предметами третьего типа. Взяв на этом шаге x_3 предметов третьего типа, мы тем самым устанавливаем, что количество предметов четвертого типа по массе не может быть более $(G - x_3 p_3)$. Максимальная ценность этого груза равна $f_4(G - x_3 p_3)$.

Максимальная же ценность груза, состоящего из предметов четвертого и третьего типов, округлится по формуле, вытекающей из (3.3.6), с ограничениями типа (3.3.7) и (3.3.8):

$$f_3(G) = \max\{x_3 c_3 + f_4(G - x_3 p_3)\} \tag{3.3.10}$$

при

$$0 \leq x_3 < \left| \frac{G}{p_3} \right|. \tag{3.3.11}$$

Расчет по формуле (3.3.10) производится следующим образом. Из ограничения (3.3.11) следует, что $0 \leq x_3 < 83/22$. Это означает, что x_3 может принимать значение не больше 3: $x_3 = 0, 1, 2, 3$. Для каждого из этих значений вычисляется вели-

чина, стоящая в фигурных скобках формулы (3.3.10); причем $f_4(G)$ рассчитывается по формуле (3.3.9):

x_3 $\{x_3 \cdot 85 + f_4(83 - x_3 22)\}$

0 $\{0 \cdot 85 + f_4(83 - 0 \cdot 22)\} = \{0 + f_4(83)\} = \left\{0 + \left|\frac{83}{24}\right| 96\right\} = \{0 + 288\} = 288;$

1 $\{1 \cdot 85 + f_4(83 - 1 \cdot 22)\} = \{85 + f_4(61)\} = \left\{85 + \left|\frac{61}{24}\right| 96\right\} = \{85 + 192\} = 277;$

2 $\{2 \cdot 85 + f_4(83 - 2 \cdot 22)\} = \{170 + f_4(39)\} = \left\{170 + \left|\frac{39}{24}\right| 96\right\} = \{170 + 96\} = 266;$

3 $\{3 \cdot 85 + f_4(83 - 3 \cdot 22)\} = \{255 + f_4(17)\} = \left\{255 + \left|\frac{17}{24}\right| 96\right\} = \{255 + 0\} = 255.$

Затем рассчитывается максимальная из полученных величин:

$$f_3(G) = \max(288;\ 277;\ 266;\ 255) = 288.$$

Соответствующее этой наибольшей ценности количество груза $x_3 = 0$ и будет условным оптимальным управлением на третьем шаге: $u_3 = x_3 = 0$.

Далее переходим к предыдущему, второму шагу загрузки предметов второго типа и для него аналогичным путем находим: $f_2(G) = 288$ и соответствующее $u_2 = x_2 = 0$.

Точно так же для первого шага $f_1(G) = 308$ и $u_1 = x_1 = 1$.

Для первого шага условное оптимальное управление одновременно является оптимальным управлением $\overset{*}{u}_1$, т. е. $\overset{*}{u}_1 = u_1 = 1$.

Далее начинается второй круг оптимизации от первого шага к последнему. Поскольку нам известно, что оптимальное управление на первом шаге требует одной единицы груза первого типа, в дальнейшем распределяется только то, что остается на остальные три типа груза, а именно: $G' = 83 - 1 \cdot 10 = 73$ единицы.

Производя расчеты, аналогичные тем, которые выполнялись на первом круге, последовательно получаем оптимальные управления для второго, третьего и четвертого шагов: $\overset{*}{u}_2 = 0$; $\overset{*}{u}_3 = 0$; $\overset{*}{u}_4 = 3$.

Оптимальное управление обеспечивает следующую максимальную общую ценность груза, рассчитываемую по формуле (3.3.6), т. е. $W = 1 \cdot 20 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 85 + 3 \cdot 96 = 308$ единиц.

Б. Условия применения.

В рассмотренном примере оптимизация могла быть осуществлена начиная с любого типа предметов. Принятый порядок соответствует общей идее динамического программирования.

3.3.3. Задача распределения огневых средств по объектам с целью нанесения максимального материального ущерба

А. Постановка задачи.

Имеется m огневых средств, которые способны нанести удар по n целям. Известны материальный ущерб при поражении i-й цели любым средством A_i, а также вероятности поражения i-й цели определенным количеством огневых средств p_i:

$$p_i = 1 - \exp(-a_i x). \qquad (3.3.12)$$

где a_i — коэффициент, характеризующий огневое средство.

Необходимо распределить огневые средства по объектам (целям) таким образом, чтобы наносимый материальный ущерб был максимальным.

Пример 3.3.2. Пять ракет ($m = 5$) нацелены на четыре объекта ($n = 4$). Материальный ущерб при поражении i-й цели любой ракетой и коэффициенты, характеризующие ракеты, соответственно равны:

	Номера целей			
	1	2	3	4
A_i	16	14	12	2
a_i	0,1	0,1	0,1	0,1

Необходимо определить количество ракет, выпущенных по каждой из целей, при котором обеспечивается нанесение максимального материального ущерба.

Решение. В данном примере, так же как и в предыдущем, нет естественного разделения операции на этапы. Такое разделение в интересах решения задачи вводится искусственно, причем принимается за шаги последовательное распределение ракет по целям. Таких шагов будет четыре.

На первом круге находится условное оптимальное управление — количество ракет, выделяемых на каждую цель, начиная с последней.

На первом шаге обозначим x_1 количество ракет, направляемых на последнюю цель (счет шагов ведется с конца).

При этом эффективность (математическое ожидание ущерба) на последнем шаге будет равна

$$\omega_1 = f_1(x_1) = A_4 p_i A_4 [1 - \exp(-a_4 x_1)] = 2[1 - \exp(-0{,}1x_1)]. \quad (3.3.13)$$

Значение x_1 нам неизвестно, так как это то количество ракет, которое осталось от условного оптимального управления на предпоследнем (втором с конца) шаге.

Переберем все возможные значения x_1 и для каждого из них произведем расчет $f_1(x_1)$ по формуле (3.3.13).

Как видно из условия задачи, x_1 может принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Для этих значений и произведем расчет (табл. 3.3.2).

Таблица 3.3.2

Возможные значения x_1 и эффективности $f_1(x_1)$

x_1	$f_1(x_1)$
0	0
1	0,190
2	0,363
3	0,518
4	0,659
5	0,787

На втором шаге (с конца) выделяется x_2 ракет на предпоследнюю цель, а соответствующая эффективность на этом шаге должна учитывать помимо ущерба от второго шага также и ущерб в результате условного оптимального управления на первом (с конца) шаге:

$$\omega_2 = A_{n-1}\left\{1 - \exp\left[-a_{n-1}(x_2 - x_1)\right]\right\}. \qquad (3.3.14)$$

Максимальный ущерб, получаемый за два шага, находится по формуле, аналогичной (3.3.10):

$$f_2(x_2) = \max\left[A_3\left\{1 - \exp\left[-a_3(x_2 - x_1)\right] + A_4\left[1 - \exp\left(-a_4 x_1\right)\right]\right\}\right]; \qquad (3.3.15)$$

при $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

Поскольку x_2 — число ракет, предназначенных для поражения как предпоследней, так и последней цели, то $x_2 \geqslant x_1$. Исходя из этого делаются предположения о всех возможных значениях x_2 ($x_2 = 0$, 1, 2, 3, 4, 5) и для каждого из них рассчитывается эффективность (табл. 3.3.3).

Одновременно находится и значение x_1 (условное оптимальное управление), при котором $f_2(x_2)$ достигает максимума. Поскольку оно зависит от x_2, обозначим его $x_1(x_2)$ и также приведем в табл. 3.3.3.

Таблица 3.3.3

Возможные значения x_2, максимальные эффективности и соответствующие им значения x_1 (x_2)

x_2	$f_2(x_2)$	$x_1(x_2)$
0	0	0
1	1,150	0
2	2,175	0
3	3,108	0
4	3,954	0
5	4,722	0

Далее аналогичным путем для всех возможных значений x_3 вычисляются $f_3(x_3)$ и $x_2(x_3)$ — табл. 3.3.4.

Таблица 3.3.4

Возможные значения x_3, максимальные эффективности и соответствующие им значения x_2 (x_3)

x_3	$f_3(x_3)$	$x_2(x_3)$
0	0	0
1	1,330	0
2	2,541	0
3	3,508	2
4	4,680	2
5	5,804	2

Аналогичным путем рассчитывается и условное оптимальное управление на четвертом (с конца) шаге. Но поскольку на этом шаге мы подошли к исходному (начальному) значению количества ракет, предназначенных для всех целей, — $m=5$, то величина x_3 определяется только для $x_4=5$. Как показывает расчет: $x_3(x_4=5)=2$.

Начинается второй круг оптимизации в обратном порядке, от четвертого шага к первому. Поскольку вначале у нас для всех целей имеется 5 ракет, а после выделения ракет на одну из целей в соответствии с условным оптимальным управлением на все

остальные должно остаться $x_3(x_4)=2$ ракеты, то оптимальное управление на четвертом (с конца) шаге $u_4^*=x_4-5-2=3$ ракеты.

Оптимальное управление на третьем (с конца) шаге должно быть таким, чтобы при распределении оставшихся $5-2=3$ ракет выдерживался принцип оптимальности. Как мы уже знаем, при этом $x_3^*=x_3(x_4)=2$.

Как показывает анализ таблиц 3.3.4, 3.3.3 и 3.3.2 условного оптимального управления:

— при $x_3=2$, $x_2(x_3)=0$;

— при $x_2=0$, $x_1(x_2)=0$.

Следовательно, $x_2^*=x_1^*=0$.

Итак, оптимальным целераспределением будет: $u_4^*=3$ ракеты, $u_3^*=2$ ракеты, $u_2^*=0$ ракет, $u_1^*=0$ ракет.

Общий ущерб при этом будет:

$$W=16\left(1-e^{-0,1\cdot 3}\right)+14\left(1-e^{-0,1\cdot 2}\right)+12\cdot 0+2\cdot 0=6,68.$$

Б. Условия применения.

В данной задаче распределение огневых средств по объектам производится по критерию максимального материального ущерба. При необходимости решить аналогичную задачу по критерию максимума математического ожидания числа пораженных целей — см. задачу в разделе 3.1.6.

3.3.4. Задача распределения боевых средств между подразделениями в многоэтапных боевых действиях

А. Постановка задачи.

Имеется определенное количество боевых средств x_0, которые распределяются для ведения боевых действий между двумя боевыми подразделениями долями y_0 и x_0-y_0. Каждое боевое средство неделимо, т. е. $x_0=0, 1, 2, 3, \ldots$, $x_0-y_0=0, 1, 2, 3, \ldots$. Боевые действия ведутся в несколько этапов — n. На каждом этапе подразделения имеют эффективности, пропорциональные выделенным боевым средствам: первое подразделение эффективность $g(x_0)$; второе — $h(x_0-y_0)$.

После первого этапа боевых действий (шага решения задачи) суммарная эффективность средств обоих подразделений равна

$$\omega_1 = f_1(x_0, y_0) = g(y_0) + h(x_0 - y_0). \qquad (3.3.16)$$

По окончании каждого этапа боевых действий количество боевых средств первого подразделения уменьшается до величины $ay_0 (0 < a < 1)$; второго — до величины $b(x_0 - y_0)$, причем $0 < b < 1$. Здесь a и b — коэффициенты, показывающие, какая доля боевых средств сохраняется по окончании каждого этапа.

К началу каждого следующего этапа оставшиеся боевые средства перераспределяются между подразделениями. Количество боевых средств, оставшихся к началу второго этапа боевых действий, равно

$$x_1 = ay_0 + b(x_0 - y_0) \qquad (3.3.17)$$

или иначе:

$$x_1 = y_0 + (x_1 - y_1),$$

где $0 < y_1 < x_1$.

По окончании второго этапа боевых действий суммарная эффективность средств обоих подразделений равна

$$\omega_2 = g(y_1) + h(x_1 - y_1), \qquad (3.3.18)$$

а общая эффективность за два этапа боевых действий:

$$f_2(x_0, y_0, y_1) = g(y_0) + h(x_0 - y_0) + g(y_1) + h(x_1 - y_1). \qquad (3.3.19)$$

Аналогично общая эффективность для n этапов боевых действий равна

$$f_n(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = g(y_0) + h(x_0 - y_0) + \dots + g(y_{n-1}) + h(x_{n-1} - y_{n-1}). \qquad (3.3.20)$$

Необходимо распределить боевые средства между подразделениями на каждом этапе таким образом, чтобы общая эффективность боевых действий была максимальной.

Пример 3.3.3. Семь единиц боевых средств ($x=7$) распределяются между двумя подразделениями. Первому подразделению

выделяется y, а второму $x-y$ единиц средств. Боевые действия ведутся в три этапа ($n=3$). На каждом из этих этапов эффективность использования средств первого подразделения составляет $g(y)=0{,}4\ y^2$, а эффективность использования средств второго подразделения $h\ (x-y)=x-y$. Вследствие потерь на каждом этапе боевых действий количество средств первого подразделения уменьшается до $0{,}6y$, а количество средств второго подразделения — до $0{,}9(x-y)$. К началу очередного этапа средства перераспределяются. Необходимо найти оптимальное распределение боевых средств на каждом этапе операции и общую ее эффективность.

Решение. В данной задаче существует естественное разделение операции на шаги — этапы боевых действий. Таких шагов три.

На первом круге расчетов находится условное оптимальное управление. На первом шаге (с конца) по формуле (3.3.13) определяется эффективность ω_1 для всех возможных значений x от 0 до $x_0=7$ при $y<x_0$. Результаты расчетов даны в табл. 3.3.5 (5-й столбец).

Далее для каждого x определяются максимальное значение ω_1, а также те значения y_1, при которых этот максимум получается. Максимальные значения ω_1 в табл. 3.3.5 заключены в прямые скобки и выписаны в отдельную табл. 3.3.6 (3-й столбец).

В той же таблице выписаны соответствующие значения x (1-й столбец) и y_1 (2-й столбец).

На втором шаге (с конца) по формуле (3.3.17) производится расчет боевых средств, оставшихся к началу этого шага, (x_1) и вносится в табл. 3.3.5 (6-й столбец). Затем по полученным значениям x_1 с помощью табл. 3.3.6 путем интерполяции по x рассчитываются соответствующие значения $f_1(x)$ и вносятся в табл. 3.3.5 (7-й столбец).

Далее рассчитывается общая эффективность боевых действий за два первых шага:

$$\omega_2=\omega_1+f(x). \tag{3.3.21}$$

Результаты расчетов ω_2 помещаются в табл. 3.3.5 (8-й столбец). Максимальные значения ω_2 в табл. 3.3.5 заключены в прямые скобки и выписаны вместе с соответствующими значениями y_2 в табл. 3.3.6 (4-й и 5-й столбцы).

На третьем шаге (с конца) аналогичным образом рассчитываются x_2, $f_2(x)$, $\omega_3=\omega_1+f_2(x)$.

Поскольку для этого шага существует единственное значение $x=x_0=7$, то расчет производится только для случая $x=7$ (табл. 3.3.7).

Из анализа таблицы видно, что условное оптимальное управление на третьем шаге, соответствующем максимальной эффективности (в прямых скобках), $y=7$. Это одновременно и оптимальное управление на данном шаге, т. е. $u^*=y^*=7$.

Переходим ко второму кругу оптимизации — в обратном порядке.

Таблица 3.3.5

Данные расчетов ω_1

x	$y \leq x$	$g(y)$	$h(x-y)$	ω_1	x_1	$f_1(x)$	ω_2
2	0	0	2	[2,0]	—	—	[2,0]
	1	0,4	1	1,4	—	—	—
	2	1,6	0	1,6	—	—	—
3	0	0	3	3,0	2,7	3,1	[6,1]
	1	0,4	2	2,4	2,4	2,6	5,0
	2	1,6	1	2,6	2,1	2,2	4,8
	3	3,6	0	[3,6]	1,8	2,0	—
4	0	0	4	4,0	3,6	5,3	[9,3]
	1	0,4	3	3,4	3,3	4,4	7,8
	2	1,6	2	3,6	3,0	3,6	7,2
	3	3,6	1	4,6	2,7	3,1	7,7
	4	6,4	0	[6,4]	2,4	2,6	9,0
5	0	0	5	5,0	4,5	8,2	13,2
	1	0,4	4	4,4	4,2	7,1	11,5
	2	1,6	3	4,6	3,9	6,1	10,7
	3	3,6	2	5,6	3,6	5,3	10,9
	4	6,4	1	7,4	3,3	4,4	11,8
	5	10,0	0	[10,0]	3,0	3,6	[13,6]
6	0	0	6	6,0	5,4	11,8	17,8
	1	0,4	5	5,4	5,1	10,4	15,8
	2	1,6	4	5,6	4,8	9,3	14,9
	3	3,6	3	6,6	4,5	8,2	14,8
	4	6,4	2	8,4	4,2	7,1	15,5
	5	10,0	1	11,0	3,9	6,1	17,1
	6	14,4	0	[14,4]	3,6	5,3	[19,7]
7	0	0	7	7,0	6,3	15,4	22,4
	1	0,4	6	6,4	6,0	14,4	20,8
	2	1,6	5	6,6	5,7	13,1	19,7
	3	3,6	4	7,5	5,4	11,8	19,4
	4	6,4	3	9,4	5,1	10,4	19,8
	5	10,0	2	12,0	4,8	9,3	21,3
	6	14,4	1	15,4	4,5	8,2	23,6
	7	19,6	0	[19,6]	4,2	7,1	[26,7]

Поскольку в начале имеется $x_0=7$ и оптимальное управление на первом шаге (с начала) $y_1^*=7$, то в соответствии с табл. 3.3.5 $x_1=4,2$. По этому значению x_1 в табл. 3.3.6 находим оптимальное управление на втором шаге $y_2^*=0$. Аналогичным путем определяем $y_3=3,8$.

Таблица 3.3.6

Данные расчетов $\max \omega_i$ и соответствующие им y_i

x	y_1	$\max \omega_1$	y_2	$\max \omega_2$
2	0	2,0	0	2,0
3	3	3,6	0	6,1
4	4	6,4	0	9,3
5	5	10,0	5	13,6
6	6	14,4	6	19,7
7	7	19,6	7	26,7

Таблица 3.3.7

y	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_2(x)$ ω_3	21,8 28,8	19,7 26,1	17,9 24,5	16,0 23,6	14,2 23,6	12,7 24,7	11,3 26,7	10,1 [29,7]

Итак, на первый этап боевых действий первому подразделению следует выделять все 7 единиц боевых средств, на второй — 0 единиц и на третий — 3,8 единицы. Это обеспечит максимальную эффективность боевых действий в целом, равную в соответствии с формулой (3.3.20): $W = 0{,}4 \cdot 7^2 + (7 - 7) + 0{,}4 \cdot 0^2 + (4{,}2 - 0) + 0{,}4 \cdot 3{,}8^2 + (3{,}8 - 3{,}8) = 19{,}6 + 4{,}2 + 5{,}8 = 29{,}6$.

Б. Условия применения.

Полученный результат — оптимальный план распределения боевых средств по этапам боевых действий. Он должен быть переведен в целочисленное решение, для чего соответствующие значения y_i^* следует округлить в ближайшую сторону.

3.3.5. Задача распределения неоднородных боевых средств по объектам (целям)

А. Постановка задачи.

Имеется m групп разнородных боевых средств, которые должны стрелять по n целям. Каждая группа средств состоит из N единиц. Цели характеризуются коэффициентами

важности (опасности) p_j и уязвимости ω_{ij}. Под уязвимостью цели понимается вероятность ее поражения.

Необходимо распределить боевые средства по объектам таким образом, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей было максимальным.

Данная задача и пример 3.3.4 полностью совпадают с задачей и примером, рассмотренными в разделе 3.2.3. Указанная задача и пример были решены с применением математического аппарата нелинейного программирования, который приводит к точному результату, однако требует сложных и трудоемких вычислений. В данном случае будет рассмотрено решение такой же задачи и примера методом динамического программирования, которое приводит к приближенному результату, но зато значительно проще и менее трудоемко.

Пример 3.3.4. Две группы разнородных боевых средств ($m=2$) нацелены на три объекта ($n=3$). В первой группе 6 единиц средств ($N_1=6$), во второй 10 единиц ($N_2=10$). Коэффициенты опасности целей соответственно равны: $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}5$. Уязвимости целей обеих групп (ω_{ij}) аналогичны заданным табл. 3.2.2.

Необходимо распределить боевые средства по целям таким образом, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей с учетом их важности было максимальным.

Решение. Расчеты, соответствующие общей схеме динамического программирования, удобно выполнять в матричной форме в такой последовательности:

1) Составляется матрица $W=\|\omega_{ij}\|$.

2) Элементы столбцов матрицы W умножаются на соответствующие значения p_j. В результате получается исходная матрица для расчетов:

$$R^{(0)}=\|r_{ij}^{(0)}\|=\|p_j\omega_{ij}\|.$$

3) В исходной матрице $R^{(0)}$ (в дальнейшем в матрице $R^{(k)}$, где k — номер шага) отыскивается максимальный элемент $r_{i_1j_1}^{(0)}$.

4) На j_1-ю цель назначается одно средство из i_1-й группы, из N_{i_1} вычитается единица и пересчитывается j_1-й столбец матрицы $R^{(0)}$, получается матрица $R^{(1)}$:

$$r_{ij_1}^{(1)}=r_{ij}^{(0)}(1-\omega_{i_1j_1}), \qquad (3.3.22)$$
$$i=1,2,\ \ldots,\ m.$$

5) Анализируется, исчерпаны ли боевые средства:

— если нет, то повторяется п. 2;

— если да, то вычисления заканчиваются и целесообразный план, близкий к оптимальному, получен.

Число шагов равно суммарному числу распределяемых средств:

$$k = \sum_{i=1}^{m} r_i. \qquad (3.3.23)$$

Численные результаты:

1) Матрица W:

		№ целей (столбцы)		
		1	2	3
№ групп средств (строки)	1	0,40	0,10	0,50
	2	0,20	0,40	0,20

2) Матрица $R^{(0)}$:

		№ целей (столбцы)		
		1	2	3
№ групп средств (строки)	1	0,12	0,02	0,25
	2	0,60	0,08	0,10

3) Максимальный элемент в матрице $R^{(0)}$ равен $r_{13}^{(1)} = 0,25$.

4) Данный максимальный элемент своим индексом 13 показывает, что в качестве первого шага следует назначить на цель № 3 одно средство из группы № 1. При этом условное отимальное управление на первом шаге будет $x_{13} = 1$.

Теперь $N_1 = 6 - 1 = 5$, а $N_2 = 10$.

Пересчитывается 3-й столбец матрицы $R^{(0)}$:

$$r_{13}^{(1)} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125;$$

$$r_{23}^{(1)} = 0,10 \cdot 0,5 = 0,05.$$

Получается матрица $R^{(1)}$:

	1	2	3
1	0,12	0,02	0,125
2	0,6	0,08	0,05

5) Поскольку боевые средства не исчерпаны, переходим ко второму шагу, возвращаясь к пп. 3.4:

Максимальный элемент в матрице $R^{(1)}$ равен $r_{13}^{(1)} = 0,125$,

поэтому: $x_{13}^{(2)} = x_{13}^{(1)} + 1 = 1 + 1 = 2$; $N_1 = 5 - 1 = 4$; $N_2 = 10$.

Пересчитывается третий столбец матрицы $R^{(1)}$:

$$r_{13}^{(2)} = 0{,}125 \cdot 0{,}5 = 0{,}062;$$

$$r_{13}^{(2)} = 0{,}05 \cdot 0{,}5 = 0{,}025.$$

6) Снова боевые средства не исчерпаны, переходим к третьему шагу и т. д. При израсходовании всех боевых средств полученные значения x_{ij} являются оптимальными управлениями, а сам план — близким к оптимальному (решение носит приближенный характер).

Число шагов, необходимых для оптимизации, рассчитывается по формуле (3.3.23), т. е. $k = N_1 + N_2 = 6 + 10 = 16$.

После 16 шагов матрица целесообразного плана $\|x_{ij}\|$ выглядит следующим образом:

	№ целей (столбцы)			
		1	2	3
№ групп средств (строки)	1	3	0	3
	2	3	5	2

Математическое ожидание числа пораженных целей M, соответствующее этому плану, рассчитывается по формуле (3.2.7), т. е.

$$M = 0{,}3\,[1-(1-0{,}4)^3(1-0{,}2)^3] + 0{,}2\,[1-(1-0{,}1)^0(1-0{,}4)^5] + 0{,}5\,[1-(1-0{,}5)^3(1-0{,}2)^2] = 0{,}3\cdot 0{,}890 + 0{,}2\cdot 0{,}922 + 0{,}5\cdot 0{,}920 = 0{,}911.$$

Б. Условия применения.

Полученное решение носит приближенный характер. Для расчетов оптимального распределения с какой угодно точностью следует применять метод, основанный на математическом аппарате нелинейного программирования, изложенный в разделе 3.2.3 (пример 3.2.2.). Причем в качестве исходного плана для точного решения целесообразно брать допустимый план, рассчитанный методом динамического программирования.

3.4. ТЕОРИЯ ИГР

3.4.1. Общие сведения

Теория игр служит для выработки рекомендаций по рациональному образу действий в условиях конфликтных ситуаций.

Под конфликтными ситуациями понимаются такие, в которых сталкиваются две или более сторон, преследующие различные цели. Причем результат любого действия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Поскольку в конфликтных ситуациях мы, как правило, не располагаем достаточными сведениями о том, что задумал противник, решение методами теории игр принимается в условиях неопределенности.

Под игрой понимаются мероприятия, состоящие из ряда действий сторон. Если в конфликте участвуют две стороны, игра называется *парной*, если более двух — *множественной*.

Система условий, регламентирующих возможные варианты действий сторон, объем информации каждой стороны о поведении другой, а также результат, к которому приводит данная совокупность действий, составляет правила игры. Игра состоит из ряда последовательных этапов или ходов, причем под ходом понимается выбор одного из предусмотренных правилами игры действий. Совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом ходе в зависимости от сложившейся обстановки, называется *стратегией*.

Результатом игры является выигрыш или проигрыш одной из сторон, обычно выражаемый в количественной форме, например, математическое ожидание числа пораженных объектов противника. Оптимальной стратегией является такая, которая при многократном повторении игры обеспечивает данной стороне максимально возможный средний выигрыш. Игры, в которых одна сторона проигрывает столько, сколько выигрывает другая, называются *играми с нулевой суммой*. Здесь будут рассматриваться только парные игры с нулевой суммой.

В общем виде постановка задачи теории игр производится следующим образом:

— имеется некоторая операция (целенаправленное действие), в которой участвуют две стороны A и B с противоположными интересами;

— имеются правила игры, регламентирующие результаты, к которым приводят возможные варианты действий сторон;

— результаты действий сторон — выигрыши выражены в количественной форме и обозначены a_{ij}, что означает ма-

тематическое ожидание выигрыша стороны A, сделавшей свой i-й ход при j-м ходе стороны B.

Условие игры обычно записывается в форме платежной матрицы или матрицы игры (табл. 3.4.1).

Таблица 3.4.1

Матрица игры

A_i	B_j				α_i
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1 A_2 ... A_m	a_{11} a_{21} ... a_{m1}	a_{12} a_{22} ... a_{m2}		a_{1n} a_{2n} ... a_{mn}	α_1 α_2 ... α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_n	

В данной игре сторона A имеет m стратегий, а сторона B — n стратегий (игра $m \times n$).

Необходимо найти оптимальные стратегии сторон, а также ожидаемый средний выигрыш (результат).

При решении игры встречаются следующие понятия:

$\alpha = \max \alpha_i = \max\min a_{ij}$ — максимин, или нижняя цена игры,

$\beta = \min \beta_j = \min\max a_{ij}$ — минимакс, или верхняя цена игры.

Получение максимина и минимакса ясно из рассмотрения матрицы игры (табл. 3.4.1).

В тех случаях, когда $\alpha = \beta$, игра имеет седловую точку — элемент матрицы, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Общее значение нижней и верхней цены игры $\alpha = \beta = \nu$ называется *чистой ценой игры.*

Седловой точке соответствует пара стратегий сторон (стратегии A_i и B_j), которые являются оптимальными. Совокупность этих стратегий называется *решением игры в чистых стратегиях.*

В тех случаях, когда $\alpha \neq \beta$, решение находится в смешанных стратегиях. *Смешанными стратегиями* называются такие, которые получаются путем случайного чередования чистых стратегий.

Смешанная стратегия стороны A обозначается $S_A(p_1, p_2, ..., p_m)$, где $p_1, p_2, ..., p_m$ — вероятности, с которыми применяются стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$. Причем $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$. Аналогично для стороны B: $S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$, где $q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$.

Решением игры в смешанных стратегиях будет пара оптимальных смешанных стратегий, обозначаемых S_A^* и S_B^*. Выигрыш, соответствующий этому решению, называется *ценой игры* ν.

Применительно к играм 2×2:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad (3.4.1)$$

$$p_2 = 1 - p_1; \quad (3.4.2)$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad (3.4.3)$$

$$q_2 = 1 - q_1; \quad (3.4.4)$$

$$\left.\begin{aligned} S_A^* &= (p_1, p_2); \\ S_B^* &= (q_1, q_2). \end{aligned}\right\} \quad (3.4.5)$$

Стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными*.

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (3.4.6)$$

Игры 2×2 имеют следующее геометрическое решение (рис. 3.4.1):

— на отрезке оси абсцисс длиной $x=1$ левый конец участка ($x=0$) изображает стратегию A_1, а правый ($x=1$) — стратегию A_2; промежуточные точки участка изображают смешанные стратегии стороны A;

— через точки A_1 и A_2 проводятся перпендикуляры к оси абсцисс: оси I—I и II—II. На оси I—I откладываются

выигрыши при стратегии A_1, а на оси II—II — выигрыши при стратегии A_2;

— стратегия противника B_1 дает на осях I—I и II—II точки с координатами a_{11} и a_{21} соответственно, а стратегия B_2 — точки с координатами a_{12} и a_{22} соответственно;

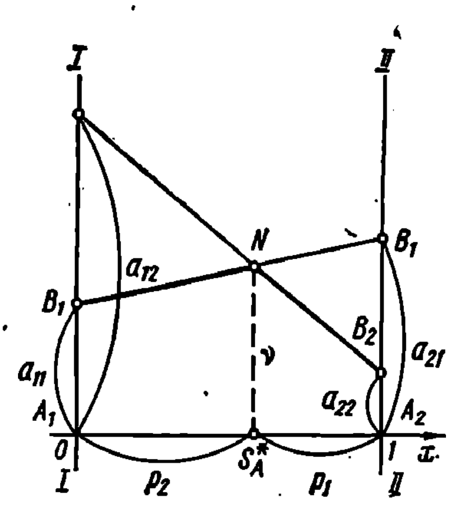


Рис. 3.4.1

— ордината точки N пересечения стратегий B_1 и B_2 дает величину выигрыша ν — цену игры. Абсцисса точки N дает вероятности обеих стратегий p_1 и p_2, которые равны расстояниям от точки S_A^* до правого и левого конца отрезка A_1A_2 соответственно.

Нижняя (гарантированная) граница выигрыша выделена на рисунке жирной линией.

Типовые задачи, решаемые с помощью теории игр, приведены ниже. В целях компактности изложения каждая из задач иллюстрирует какой-либо один вид решения:

— задача выбора вида оружия — решение игры с неустойчивыми стратегиями;

— задача выбора тактического приема — решение игры с седловой точкой;

— задача дезинформации — решение игры со смешанными стратегиями (алгебраический прием);

— задача выбора оружия для противодействия — решение игры со смешанными стратегиями (геометрический прием).

Следует иметь в виду, что эти решения не являются специфическими и могут иметь место в зависимости от условий в каждой из приведенных задач.

3.4.2. Задача выбора вида оружия

А. Постановка задачи.

Мы имеем три типа оружия: A_1, A_2, A_3. Противник располагает тремя видами объектов: B_1, B_2, B_3, для поражения которых это оружие предназначено (самолеты, корабли, танки). Наша задача — поразить объект с максимально возможной вероятностью. Задача противника — сохранить объект при минимально возможной вероятности его поражения. Вероятности поражения i-м типом оружия j-го объекта p_{ij} заданы платежной матрицей.

Необходимо дать рекомендации по рациональному выбору типа оружия, обеспечивающие наилучшее решение боевой задачи при отсутствии данных о решении противника о выборе им объекта.

Пример 3.4.1. Условия задачи заданы матрицей $\|p_{ij}\|$, содержащей значения вероятностей поражения i-м типом оружия j-го объекта (табл. 3.4.2).

Таблица 3.4.2

Матрица игры

Тип оружия, A_i	Вид объекта, B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0,5	0,4	0,9	0,4*
A_2	0,2	0,9	0,1	0,1
A_3	0,8	0,0	1,0	0,0
β_j	0,8*	0,9	1,0	

Необходимо выбрать тип оружия, при применении которого вероятность поражения объекта будет по возможности наибольшей, что бы ни делал противник.

Решение. Выписываем справа минимумы строк и из них выбираем наибольший $\alpha_1=0{,}4$ (отмечен звездочкой). Это нижняя цена игры, или максимин. Затем выписываем внизу максимумы столбцов и из них выбираем наименьший $\beta_1=0{,}8$ (отмечен звездочкой). Это верхняя цена игры, или минимакс.

Решение заключается в том, что необходимо систематически применять максиминную стратегию — оружие типа A_1. При этом мы гарантируем себе результаты не менее $p=0{,}4$, что бы ни предпринимал противник (его замыслы нам неизвестны). Для противника наилучшая стратегия — выбор объекта вида B_1; при этом он гарантирует себе результат не более $p=0{,}8$ (чем больше вероятность поражения, тем для него хуже).

Б. Условия применения.

Поскольку в рассмотренном примере нет седловой точки ($\alpha\neq\beta$), то это означает, что полученные рекомендации верны лишь для случая, когда противник не располагает данными об избранном нами решении. Это так называемая неустойчивая стратегия. Если противник узнает о том, что мы применяем оружие типа A_1, он сразу же начнет применять объект вида B_2 и тем самым улучшит свой результат до $p=0{,}4$.

В тех случаях, когда в подобной задаче противник располагает данными о нашем выборе, необходимо искать решение в смешанных стратегиях.

3.4.3. Задача выбора тактического приема

А. Постановка задачи.

Мы располагаем тремя различными тактическими приемами: A_1, A_2, A_3. Противник может в свою очередь применить три ответных тактических приема: B_1, B_2, B_3. Наша задача — выполнение тактического приема с максимально возможной эффективностью. Задача противника — снизить эффективность нашего тактического приема до возможного минимума. Эффективности нашего i-го тактического приема при применении противником j-го ответного приема M_{ij} заданы платежной матрицей.

Необходимо дать рекомендации по рациональному выбору тактического приема, обеспечивающие наилучшее решение боевой задачи при отсутствии данных о решении противника.

Пример 3.4.2. Условия задачи заданы матрицей $\|M_{lj}\|$, содержащей значения эффективности l-го тактического приема (табл. 3.4.3). M_{lj} здесь математические ожидания числа объектов противника, выведенных из строя.

Таблица 3.4.3

Матрица игры $\|M_{lj}\|$

Наш тактический прием, A_l	Ответный тактический прием противника, B_j			α_l
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	6	8	5
A_2	9	[7]	8	7*
A_3	9	7	6	6
β_j	9	7*	8	

Необходимо выбрать тактический прием, при применении которого математическое ожидание числа пораженных объектов будет по возможности наибольшим, что бы ни делал противник.

Решение. Выписываем справа минимумы строк и из них выбираем наибольший $\alpha_2=7$ (отмечен звездочкой). Это нижняя цена игры, или максимин. Затем выписываем внизу максимумы столбцов и из них выбираем наименьший $\beta_2=7$ (отмечен звездочкой). Это верхняя цена игры, или минимакс.

Решение заключается в том, что необходимо систематически применять свою оптимальную стратегию — тактический прием A_2. При этом мы гарантируем себе результат не менее $M=7$, что бы ни предпринимал противник (его замыслы нам неизвестны). Для противника оптимальная стратегия — выбор ответного тактического приема B_2; при этом он гарантирует себе результат не более $M=7$ (чем математическое ожидание больше, тем для него хуже).

Цена игры $\nu=\alpha=\beta$ соответствует седловой точке (заключена в прямые скобки).

Б. Условия применения.

То, что в рассмотренном примере есть седловая точка ($\alpha=\beta$), означает, что полученные рекомендации верны независимо от того, располагает ли противник данными об избранном нами решении или нет. Это так называемая устойчивая стратегия. Если противник, узнав, что мы применяем тактический прием A_2, станет в качестве ответного приема использовать B_1 или B_3, он только улучшит наш результат до $M_{21}=9$ или $M_{23}=8$ соответственно.

3.4.4. Задача дезинформации (маскировки)

А. Постановка задачи.

У нас имеется объект. В целях маскировки объекта создано две одинаковых позиции A_1 и A_2, на одной из которых располагается истинный объект, а на другой — ложная цель. Противник, не располагая информацией о том, где находится истинный объект, может нанести удар как по позиции A_1, так и по позиции A_2. Удар по позиции A_1 обозначим B_1, удар по позиции A_2 обозначим B_2. Наша задача — сохранение объекта, задача противника — поражение объекта. Эффективность сохранения объекта, находящегося на i-й позиции при нанесении противником удара по j-й позиции, ω_{ij} задана платежной матрицей.

Необходимо дать рекомендации по рациональному выбору позиции для объекта, обеспечивающие наилучшее решение задачи его сохранения.

Пример 3.4.3. Условия задачи заданы матрицей $\|\omega_{ij}\|$, содержащей значения эффективностей сохранения объекта, находящегося на i-й позиции при нанесении удара по j-й позиции (табл. 3.4.4). Здесь ω_{ij} — вероятности непоражения объекта.

Таблица 3.4.4

Позиция, на которой находится объект, A_i	Позиция, по которой наносится удар, B_j		α_i
	B_1	B_2	
A_1	0,608	1,000	0,608*
A_2	1,000	0,440	0,440
β_j	1,000*	1,000*	

Необходимо выбрать вариант занятия позиции объектом, обеспечивающий его наибольшую возможную сохранность независимо от того, по какой позиции противник нанесет удар.

Решение. Выписываем справа минимумы строк и из них выбираем наибольший $\alpha_1 = 0{,}608$. Это нижняя цена игры, или максимин. Затем выписываем внизу максимумы столбцов и из них выбираем наименьший $\beta_1 = \beta_2 = 1{,}000$. Это верхняя цена игры, или минимакс.

Поскольку игра не имеет седловой точки ($\alpha \neq \beta$), оптимальное решение в чистой стратегии невозможно. Выбор в качестве решения позиции A_1, имеющей наибольшую эффективность, как мы

видели из примера 3.4.1, дает неустойчивую стратегию, пригодную лишь в случае, если противник не располагает данными об избранном нами решении.

Для получения устойчивой стратегии в данных условиях необходимо искать решение в смешанных стратегиях:

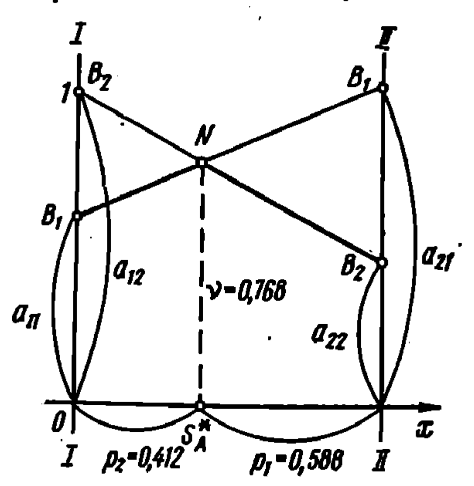


Рис. 3.4.2

— по формуле (3.4.1):

$$p_1 = \frac{0{,}44 - 1{,}00}{0{,}608 + 0{,}44 - 1{,}00 - 1{,}00} = 0{,}588;$$

— по формуле (3.4.2) имеем $p_2 = 1 - p_1 = 0{,}412$; поскольку $a_{12} = a_{21}$, $q_1 = p_1 = 0{,}588$, $q_2 = p_2 = 0{,}412$;

— по формуле (3.4.6):

$$\nu = \frac{0{,}44 \cdot 0{,}608 - 1{,}00 \cdot 1{,}00}{0{,}608 + 0{,}44 - 1{,}00 - 1{,}00} = 0{,}768;$$

— по формулам (3.4.5) находим $S_A^* = (0{,}588;\ 0{,}412)$; $S_B^* = (0{,}588;\ 0{,}412)$.

Решение показывает преимущество (относительную ценность) позиции A_1 (58,8%) по сравнению с позицией A_2 (41,2%).

Графическое решение см. на рис. 3.4.2.

Б. Условия применения.

Полученные значения о преимуществах того или другого способа принимаются во внимание при принятии ре-

шения. В тех случаях, когда отсутствуют дополнительные (кроме принятых в расчет) данные об обстановке, выбор способа действий может производиться с помощью механизма случайного выбора.

3.4.5. Задача выбора вида оружия для оказания противодействия оружию противника

А. Постановка задачи.

Противник может применить три различных типа оружия: B_1, B_2, B_3. Мы способны оказать противодействие оружию противника, применяя контроружие типов A_1, A_2, A_3. Наша задача — отразить оружие противника с максимально возможной эффективностью. Задача противника — преодолеть противодействие нашего контроружия с минимально возможными эффективностями поражения своего оружия. Вероятности поражения i-м типом нашего контроружия j-го типа оружия противника p_{ij} заданы платежной матрицей.

Необходимо дать рекомендации по рациональному выбору типа контроружия, обеспечивающие наилучшее решение боевой задачи при отсутствии данных о том, какое оружие применяет противник.

Пример 3.4.4. Условия задачи заданы матрицей, содержащей значения вероятностей поражения контроружием i-го типа оружия противника j-го типа (табл. 3.4.5).

Таблица 3.4.5

Матрица игры $\|p_{ij}\|$

Тип контроружия, A_i	Тип оружия противника, B_j			α_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0,0	0,5	0,83	0,0
A_2	1,0	0,75	0,5	0,5*
β_j	1,0	0,75*	0,83	

Необходимо выбрать тип нашего контроружия, обеспечивающий наибольшую возможную эффективность поражения оружия противника независимо от того, какое оружие он применяет.

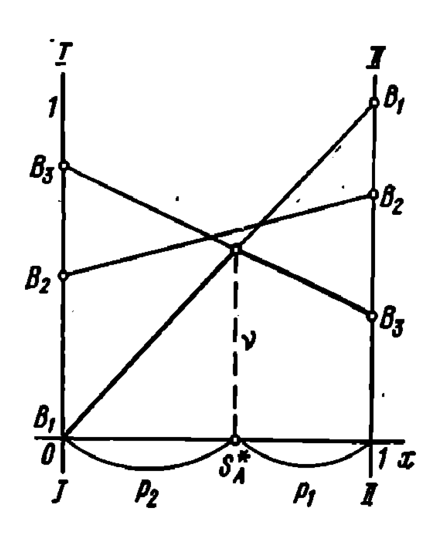


Рис. 3.4.3

Решение. Выписываем справа минимумы строк и из них выбираем наибольший $\alpha_2 = 0{,}5$ (отмечен звездочкой). Это нижняя цена игры, или максимин. Выписываем внизу максимумы столбцов и из них выбираем наименьший $\beta_2 = 0{,}75$ (отмечен звездочкой). Это верхняя цена, или минимакс.

Поскольку игра не имеет седловой точки ($\alpha \neq \beta$), ищем решение в смешанных стратегиях. Прибегнем к геометрическому решению (рис. 3.4.3).

В соответствии с методикой, изложенной в разделе 3.4.1, находим нижнюю границу выигрыша, которая на рисунке выделена жирной линией.

Поскольку стратегия B_2 лежит выше этой границы, активными стратегиями противника являются только стратегии B_1 и B_3. Это обстоятельство сводит игру к игре 2×2, матрица которой приведена в табл. 3.4.6.

Решение данной игры в смешанных стратегиях находится следующим образом:

— по формуле (3.4.1):

$$p_1 = \frac{0{,}5 - 1{,}0}{0{,}0 + 0{,}5 - 0{,}83 - 1{,}0} = 0{,}376;$$

Таблица 3.4.6

Упрощенная матрица игры $\|p_{ij}\|$

Тип контроружия, A_i	Тип оружия противника, B_j		a_i
	B_1	B_2	
A_1	0,0	0,83	0,0
A_2	1,0	0,5	0,5*
β_j	1,0	0,83*	

— по формуле (3.4.2): $p_2 = 1 - p_1 = 0{,}624$;

— по формуле (3.4.3):

$$q_1 = \frac{0{,}5 - 0{,}83}{0{,}0 + 0{,}5 - 0{,}83 - 1{,}0} = 0{,}248;$$

— по формуле (3.4.4): $q_2 = 1 - 0{,}248 = 0{,}752$;

— по формуле (3.4.6):

$$\nu = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}0 - 0{,}83 \cdot 1{,}0}{0{,}0 + 0{,}5 - 0{,}83 - 1{,}0} = 0{,}624;$$

— по формулам (3.4.5): $S_A^* = (0{,}376;\ 0{,}624)$; $S_B^* = (0{,}248;\ 0{,}752)$.

Решение показывает преимущество (относительную ценность) контроружия A_2 (62,4%) по сравнению с контроружием A_1 (37,6%).

Б. Условия применения.

Реализация решения в смешанных стратегиях в данном случае должна производиться путем так называемой *физической смеси стратегий*. Это означает, что на носителе контроружия последнее должно находиться в пропорциях, соответствующих компонентам смешанной стратегии. Носитель должен иметь:

— контроружия A_1 — 37,6%,

— контроружия A_2 — 62,4%.

3.5. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

3.5.1. Общие сведения

Сетевое планирование служит для составления и реализации рационального плана проведения операции, предусматривающего осуществление ее в кратчайший срок и с минимальными затратами.

Методы сетевого планирования дают возможность оценивать «узкие» места операции и вносить необходимые коррективы в ее организацию.

Все мероприятия проводимой операции в их взаимосвязи представляются в виде наглядной схемы — *сетевого графика* (рис. 3.5.1).

Сетевой график состоит из элементов двух типов: работ и событий.

Работа представляет собой выполнение некоторого мероприятия, например, выработка решения штабом, передислокация воинского подразделения и т. п. Работа связана с затратой времени и расходом ресурсов, она должна иметь начало и конец. Работа обозначается на графике стрелкой, над которой проставлен номер работы (прописная буква с индексом), а под ней — продолжительность работы (в скобках).

Событиями называются начальные и конечные точки работы, например, окончание выработки решения штабом, завершение передислокации воинского подразделения и т. п. Событие не является процессом и поэтому не сопровождается затратами времени или ресурсов. Событие обозначается кружком с буквенным обозначением внутри (строчная буква с индексом).

Относительно данной работы события могут быть *предшествующие* (непосредственно перед ней) и *последующие* (непосредственно за ней). Относительно данной работы другие работы могут быть предшествующие и последующие. Каждая входящая в данное событие работа является предшествующей каждой выходящей работе; каждая выходящая работа является последующей для каждой входящей.

Основные свойства сетевого графика:

— ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;

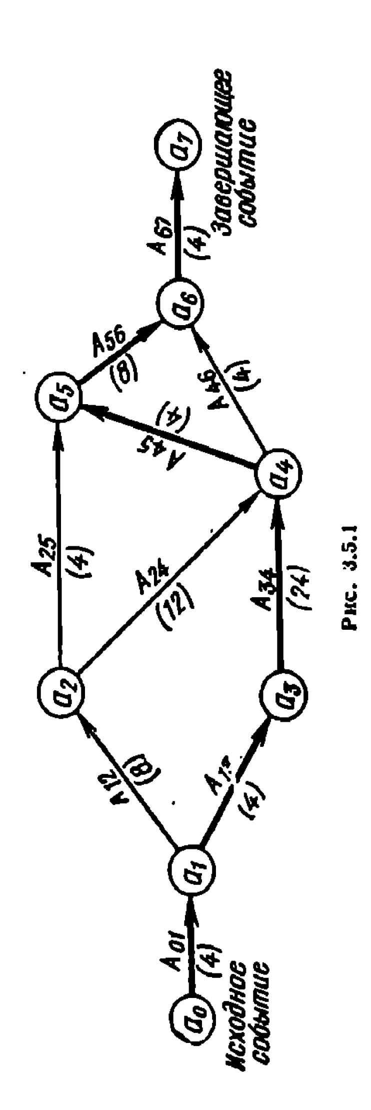

Исходное событие
Завершающее событие
A01
(4)
A12
(8)
(4)
A25
(4)
A24
(12)
A34
(24)
A45
(4)
A46
(4)
A56
(8)
A67
(4)

Рис. 3.5.1

— ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие;

— ни одна последующая работа не может начаться раньше, чем будут закончены все предшествующие ей работы.

3.5.2. Построение сетевого графика

Предварительно разрабатывается перечень событий, которые определяют планируемый процесс (операцию) и без которых он не может состояться (табл. 3.5.1). Затем продумываются работы, в результате которых все необходимые события должны произойти (табл. 3.5.2). В этой же таблице указывается, какие работы являются предшествующими по отношению к данной, а какие — последующими.

Исходя из перечня событий и работ, составляется сетевой график (рис. 3.5.1). Обычно сетевой график строится от исходного события к завершающему, слева направо. Исходному событию присваивается нулевой номер, завершающему событию — последний номер. Остальные события нумеруются так, чтобы номер предыдущего события был меньше номера последующего события. Нумерация производится следующим образом. Вычеркиваются все работы, выходящие из события a_0, и просматриваются все события, в которых оканчиваются эти вычеркнутые работы. Среди просмотренных находятся события, которые не имеют входящих в них работ (за исключением уже вычеркнутых). Они называются *событиями первого ранга*; с них начинается нумерация. Затем вычеркиваются все работы, выходящие из событий первого ранга, а среди них находятся события, не имеющие входящих работ (кроме вычеркнутых). Это — *события второго ранга*, которые нумеруются следующими числами, и т. д.

Поскольку в процессе вычеркивания движение осуществляется в направлении стрелок (работ), а сетевой график имеет конечное число событий, никакое предшествующее событие не может получить номер больший, чем любое последующее. Кроме того, всегда находится хотя бы одно событие соответствующего ранга.

Работа кодируется индексом, содержащим номера событий, между которыми она заключена. Свершение собы-

тия зависит от окончания самой длительной из всех входящих в него работ. Последовательные работы и события формируют пути (цепочки), которые ведут от исходного к завершающему событию. Максимальное число отдельных работ, входящих в какой-либо из путей, ведущих из исходного события в данное, и дает ранг события.

Пример 3.5.1. Боевая задача — нанесение согласованного по месту и времени удара по противнику — выполняется двумя подразделениями соединения (подразделения I и II). Имеются перечень событий (табл. 3.5.1) и перечень работ (табл. 3.5.2), необходимых для нанесения удара. Требуется составить сетевой график планируемого удара.

Решение. Исходя из перечней событий и работ, в соответствии с разделом 3.5.1 строится сетевой график (рис. 3.5.1). При этом событием первого ранга является событие a_1, событиями второго ранга — события a_2 и a_3 и т. д.

Таблица 3.5.1

Перечень событий планируемого удара

Обозначение событий	Наименование событий
a_0	Командиром соединения получено приказание на выполнение боевой задачи
a_1	Штабом соединения выработано решение на выполнение боевой задачи
a_2	Решение передано подразделению I
a_3	Решение передано подразделению II
a_4	Подразделение II готово к выполнению боевой задачи
a_5	Подразделение I готово к выполнению боевой задачи
a_6	Боевая задача выполнена — нанесен согласованный удар по противнику подразделениями I и II
a_7	Сделано донесение штабу соединения о выполнении боевой задачи

Таблица 3.5.2

Перечень работ в планируемой операции

Обозначение работ	Наименование работ	Время выполнения работы, ч	Предшествующие работы	Последующие работы
A_{01}	Работа штаба по подготовке материалов для принятия решения и принятия его командиром соединения	4	—	A_{12}, A_{13}
A_{12}	Постановка боевой задачи подразделению I	8	A_{01}	A_{24}, A_{25}
A_{13}	Постановка боевой задачи подразделению II	4	A_{01}	A_{34}
A_{24}	Передача подразделению II от подразделения I необходимых сил и средств	12	A_{12}	A_{45}, A_{46}
A_{25}	Подготовка подразделения I к решению боевой задачи	4	A_{12}	A_{56}
A_{34}	Подготовка подразделения II к решению боевой задачи	24	A_{13}	A_{45}, A_{46}
A_{45}	Передача подразделению I от подразделения II необходимых сил и средств	4	A_{24}, A_{34}	A_{56}
A_{46}	Выполнение боевой задачи подразделением I	4	A_{24}, A_{34}	A_{67}
A_{56}	Выполнение боевой задачи подразделением II	8	A_{25}, A_{45}	A_{67}
A_{67}	Донесение командиру соединения о выполнении боевой задачи	4	A_{46}, A_{56}	—

Первый ранг события a_1 показывает, что путь, ведущий в это событие из исходного события a_0, состоит не более чем из одной работы. Событие a_4 — третьего ранга, так как пути, ведущие в это событие из исходного события a_0, включают только три работы: A_{01}, A_{13}, A_{34} или A_{01}, A_{12}, A_{24}.

Сетевой график дает возможность оценить количество и качество мероприятий планируемой операции. Он позволяет установить, от каких из них и в какой степени зависит достижение конечной цели операции. Так, ранг события показывает, какое количество работ и каких необходимо выполнить, чтобы данное событие состоялось. Сетевой график также показывает, какие мероприятия следует выполнять в первую очередь, какие можно выполнять параллельно. Так, в нашем примере видно, что ни одна последующая работа не может выполняться раньше чем закончатся все предшествующие. Видно также, что работы A_{24} и A_{25} могут выполняться параллельно.

3.5.3. Анализ сетевого графика

Основными параметрами сетевого графика являются:

1) Наиболее раннее возможное время наступления j-го события $T_р(j)$, вычисляемое по формуле

$$T_р(j) = \max_{i \subset j} \{T_р(i) + t_{ij}\}, \qquad (3.5.1)$$

где символами i и j обозначаются номера предшествующего и последующего событий соответственно;
t_{ij} — продолжительность (i, j)-й работы.

Обозначение $i \subset j$ показывает, что событие i предшествует событию j.

2) Самое позднее допустимое время наступления i-го события $T_п(i)$, вычисляемое по формуле

$$T_п(i) = \min_{i \supset j} [T_п(j) - t_{ij}], \qquad (3.5.2)$$

где обозначение $i \supset j$ показывает, что событие j предшествует событию i.

3) Резерв времени данного события R_i, вычисляемый по формуле

$$R_i = T_п(i) - T_р(i). \qquad (3.5.3)$$

4) Полный резерв времени работы $r_п(i, j)$, вычисляемый по формуле

$$r_п(i, j) = T_п(j) - T_р(i) - t_{ij}. \quad (3.5.4)$$

Смысл полного резерва времени работы заключается в том, что задержка в выполнении работы (i, j) на величину $\Delta t_{ij} > r_п$ приводит к задержке в наступлении завершающего события на величину $\Delta t_{ij} - r_п(i, j)$.

5) Свободный резерв времени работы $r_с(i, j)$, вычисляемый по формуле

$$r_с(i, j) = T_р(j) - T_п(i) - t_{ij}. \quad (3.5.5)$$

Смысл свободного резерва времени работы заключается в том, что задержка в выполнении работы на величину $\Delta t_{ij} < r_с(i, j)$ не влияет ни на один другой срок, определенный данным сетевым графиком.

Основными показателями сетевого графика, по которым выполняется его анализ, являются:

1) Критический путь — это полный путь, на котором суммарная продолжительность работ является максимальной. Иными словами, это самый длинный по времени путь в сетевом графике от исходного до завершающего события. Критический путь лимитирует выполнение операции, поэтому любая задержка на работах критического пути увеличивает время всего процесса. События, через которые проходит критический путь, и работы, лежащие на критических путях, называются *напряженными*. У критических работ как полные, так и свободные резервы времени равны нулю (признак критической работы). Критический путь рассчитывается путем определения работ, полные резервы времени которых равны нулю.

2) Полный резерв времени ненапряженного пути — это резерв времени ненапряженных событий и работ, т. е. тех, которые лежат не на критическом пути. В том случае, если ненапряженный и критический пути не пересекаются, полный резерв времени ненапряженного пути равен разности между его длиной и длиной критического пути (во временной мере). Если ненапряженный и критический пути пересекаются, полный резерв времени равен самому длительному участку ненапряженного пути, заключенному между соответствующими парами событий критического

пути. Полный резерв времени ненапряженного пути показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ этого пути без изменения срока выполнения операции в целом.

Сущность анализа сетевого графика заключается в том, что выявляются резервы времени работ, лежащих на ненапряженных путях, и направляются на работы, лежащие на критическом пути, который лимитирует срок завершения работы в целом. Этим достигается сокращение времени выполнения критических работ, а значит, и всей операции.

3) Время выполнения работ (временные оценки работ) может определяться либо по нормативам (статистическим показателям), либо при отсутствии их — по следующим эмпирическим формулам:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{t_{\min} + 4t_{\text{н. в}} + t_{\max}}{6}; \qquad (3.5.6)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{6}, \qquad (3.5.7)$$

где $\bar{t}_{ij}$ — математическое ожидание продолжительности выполнения (ij) работы (среднеожидаемое время работы);

σ_{ij} — среднеквадратическая ошибка в определении продолжительности работы;

$t_{\min}$ — продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях (оптимистическая оценка);

$t_{\max}$ — продолжительность работы при самом неблагоприятном стечении обстоятельств (пессимистическая оценка);

$t_{\text{н. в}}$ — продолжительность работы при условии, что не возникает никаких неожиданных трудностей (наиболее вероятная оценка).

Математическое ожидание любого параметра сетевого графика, являющегося суммой величин t_{ij}, равно $\sum \bar{t}_{ij}$. Среднеквадратическая ошибка в определении этого параметра равна $\sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}$.

Вероятность свершения j-го события в расчетный срок (p_j) определяется по формуле

$$p_j = \Phi\left(\frac{T_з - T_р(j)}{\sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}}\right). \qquad (3.5.8)$$

где Φ — функция Лапласа;
$T_з$ — заданный срок свершения события;
$T_р(j)$ — время раннего свершения j-го события;
σ_{ij} — среднеквадратические ошибки в определении продолжительности работ, которые использовались при вычислении раннего срока наступления j-го события.

Пример 3.5.2. Составлен сетевой график нанесения согласованного удара по противнику (см. пример 3.5.1, график рис. 3.5.1). Необходимо произвести количественный анализ данного графика.

Решение. Вначале рассчитываются основные параметры сетевого графика.

1) Расчет наиболее раннего возможного времени наступления каждого j-го события производится по формуле (3.5.1); вычисления выполняются шаг за шагом:

$T_р(0) = 0;$

$T_р(1) = T_р(0) + 4 = 4;$

$T_р(2) = T_р(1) + 8 = 12;$

$T_р(3) = T_р(1) + 4 = 8;$

$T_р(4) = \max[(T_р(2) + 12);\ (T_р(3) + 24)] = \max(24;\ 32) = 32;$

$T_р(5) = \max[(T_р(2) + 4);\ (T_р(4) + 4)] = \max(16;\ 36) = 36;$

$T_р(6) = \max[(T_р(4) + 4);\ (T_р(5) + 8)] = \max(36;\ 44) = 44;$

$T_р(7) = T_р(6) + 4 = 48.$

2) Расчет самого позднего допустимого времени наступления каждого i-го события производится по формуле (3.5.2), двигаясь от конечного события a_n к исходному a_0, при этом $T_п(n) = T_р(n)$:

$T_п(7) = T_р(7) = 48;$

$T_п(6) = T_п(7) - 4 = 44;$

$T_п(5) = T_п(6) - 8 = 36;$

$T_п(4) = \min[(T_п(6) - 4);\ (T_п(5) - 4)] = \min(40;\ 32) = 32;$

$T_п(3) = T_п(4) - 24 = 8;$

$T_п(2) = \min[(T_п(4) - 12); (T_п(5) - 4)] = \min(20; 32) = 20;$
$T_п(1) = \min[(T_п(3) - 4); (T_п(2) - 8)] = \min(4; 12) = 4;$
$T_п(0) = T_п(1) - 4 = 0.$

3) Резерв времени каждого данного события расчитывается по формуле (3.5.3):

$R_0 = 0 - 0 = 0;$ $R_4 = 32 - 32 = 0;$
$R_1 = 4 - 4 = 0;$ $R_5 = 36 - 36 = 0;$
$R_2 = 20 - 12 = 8;$ $R_6 = 44 - 44 = 0;$
$R_3 = 8 - 8 = 0;$ $R_7 = 48 - 48 = 0.$

4) Полный резерв времени каждой работы (ij) рассчитывается по формуле (3.5.4):

$r_п(0, 1) = 4 - 0 - 4 = 0;$ $r_п(2, 4) = 32 - 12 - 12 = 8;$
$r_п(1, 2) = 20 - 4 - 8 = 8;$ $r_п(4, 5) = 36 - 32 - 4 = 0;$
$r_п(2, 5) = 36 - 12 - 4 = 20;$ $r_п(1, 3) = 8 - 4 - 4 = 0;$
$r_п(5, 6) = 44 - 36 - 8 = 0;$ $r_п(3, 4) = 32 - 8 - 24 = 0;$
$r_п(6, 7) = 48 - 44 - 4 = 0;$ $r_п(4, 6) = 44 - 32 - 4 = 8.$

5) Свободный резерв времени каждой работы (ij) рассчитывается по формуле (3.5.5):

$r_с(0, 1) = 4 - 0 - 4 = 0;$ $r_с(2, 4) = 32 - 20 - 12 = 0;$
$r_с(1, 2) = 12 - 4 - 8 = 0;$ $r_с(4, 5) = 36 - 32 - 4 = 0;$
$r_с(2, 5) = 36 - 20 - 4 = 12;$ $r_с(1, 3) = 8 - 4 - 4 = 0;$
$r_с(5, 6) = 44 - 36 - 8 = 0;$ $r_с(3, 4) = 32 - 8 - 24 = 0;$
$r_с(6, 7) = 48 - 44 - 4 = 0;$ $r_с(4, 6) = 44 - 32 - 4 = 8.$

Далее производится расчет основных показателей сетевого графика.

1) Расчет критического пути производится путем определения работ, полные резервы времени которых равны нулю.

Это путь $a_0 \to a_1 \to a_3 \to a_4 \to a_5 \to a_6 \to a_7$. На рис. 3.5.1 он показан жирными стрелками.

Длина критического пути (по времени) равна $T_{кр} = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,4} + t_{4,5} + t_{5,6} + t_{6,7} = 48.$

2) Определяется полный резерв времени ненапряженного пути. В качестве ненапряженного пути рассмотрим путь $a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_4 \to a_6 \to a_7$.

Поскольку критический и ненапряженный пути пересекаются, полный резерв времени ненапряженного пути определяется резервами участков ненапряженного пути, заключенными между пересечениями 8+8=16.

Проведенный анализ показывает, что сокращение сроков нанесения удара может быть достигнуто путем перераспределения времени между ненапряженным и критическим путями. Часть ресурсов с ненапряженного пути может быть безболезненно снята и переведена на критический путь. Тем самым продолжительность критического пути, а значит, и удара в целом будет сокращена.

3) Временные оценки работ производятся в соответствии с формулами (3.5.6) — (3.5.8).

Например, при $t_{min} = 4$ ч, $t_{max} = 9$ ч, $t_{н.в} = 7$ ч, $T_з = 10$ ч, $T_р(J) = 8$ ч, $\sum \sigma_{ij}^2 = 25$ ч²,

среднеожидаемое время выполнения работы равно

$$\bar{t}_{ij} = \frac{4 + 4 \cdot 7 + 9}{6} = 6{,}84 \text{ ч},$$

среднеквадратическая ошибка в определении продолжительности работы равна

$$\sigma_{ij} = \frac{9 - 4}{6} = 0{,}833 \text{ ч},$$

вероятность свершения j-го события в расчетный срок равна

$$p_j = \Phi\left(\frac{10 - 8}{25}\right) = \Phi(0{,}4) = 0{,}311.$$

4. ПОИСК ОБЪЕКТА

4.1. ВИДЫ ПОИСКА

Различают три основных вида поиска: контрольный (в районе), по вызову (вторичный), на рубеже (на линии).

Контрольный поиск представляет обследование заданного района для обнаружения объекта или установления его отсутствия. Он проводится в тех случаях, когда нет данных о месте нахождения объекта на определенный момент времени. Контрольному поиску соответствует равномерное распределение вероятных мест объекта в районе, подлежащем обследованию.

Поиск по вызову представляет обследование места обнаружения объекта через некоторое время после того, как это обнаружение произошло. Он проводится в тех случаях, когда имеются данные о месте нахождения объекта на определенный момент времени. Поиску по вызову соответствует неравномерное распределение вероятных мест объекта в окрестностях точки его первичного обнаружения.

Поиск на рубеже представляет обследование вдоль заданной линии. Он проводится в случаях, когда имеются данные о вероятном курсе объекта и участке его возможного прорыва через рубеж. Поиску на рубеже соответствует равномерное распределение вероятных мест прорыва объекта через линию рубежа.

В зависимости от периодичности использования технических средств обнаружения объекта поиск может быть непрерывным или дискретным.

Критериями эффективности поиска могут быть производительные и вероятностные показатели.

Производительными показателями поиска являются теоретическая производительность поиска, реальная производительность поиска и отношение реальной производительности поиска к теоретической.

Вероятностные показатели поиска: вероятность обнаружения объекта к заданному сроку, математическое ожидание числа объектов, обнаруженных к заданному сроку, и математическое ожидание времени, необходимого для обнаружения объекта (среднеожидаемое время обнаружения объекта).

При расчетах поиска определяются также вероятности нахождения объектов в заданной области и появления их с различных направлений и на различных расстояниях от наблюдателя.

4.2. КОНТРОЛЬНЫЙ ПОИСК (ПОИСК В ЗАДАННОМ РАЙОНЕ)

4.2.1. Расчет производительных критериев поиска

Теоретическая производительность поиска $W_т$ равна

$$W_т = Ш_{п.о} v_{\rho 0}, \quad (4.2.1)$$

где $Ш_{п.о}$ — эффективная ширина полосы обследования наблюдателя (наблюдателей);

— для группы наблюдателей:

$$Ш_{п.о} = (N_н - 1)\, d_н + 2Д_{об}, \quad (4.2.2)$$

где $N_н$ — число наблюдателей;

$d_н$ — расстояние между наблюдателями при поиске;

$Д_{об}$ — математическое ожидание дальности действия технического средства обнаружения (среднеожидаемая дальность обнаружения);

— для одиночного наблюдателя ($N_н = 1$):

$$Ш_{п.о} = (1 - 1)\, d_н + 2Д_{об} = 2Д_{об};$$

$v_{\rho 0}$ — средняя относительная скорость поиска,

$$v_{\rho 0} = k_v (v_н + v_ц). \quad (4.2.3)$$

где k_v — коэффициент, выбираемый из табл. 4.2.1;

$v_н$ и $v_ц$ — скорости наблюдателя и объекта (цели) соответственно.

Таблица 4.2.1

Коэффициент k_v для расчета средней относительной скорости

$\frac{v_н}{v_ц}$ или $\frac{v_ц}{v_н}$	k_v	$\frac{v_н}{v_ц}$ или $\frac{v_ц}{v_н}$	k_v
0,00	1,00	0,60	0,68
0,10	0,91	0,70	0,66
0,20	0,84	0,80	0,65
0,30	0,79	0,90	0,64
0,40	0,74	1,00	0,64
0,50	0,71		

Реальная или эффективная производительность поиска ($W_{эф}$) равна

$$W_{эф} = \frac{cS_р}{N_ц t_п}, \qquad (4.2.4)$$

где c — общее число объектов, обнаруженных за время поиска;

$S_р$ — площадь района поиска;

$N_ц$ — среднее количество объектов, находившихся в районе во время поиска;

$t_п$ — фактическая продолжительность поиска всеми наблюдателями.

Пример 4.2.1. Производится поиск в районе площадью $S_р$ = 60 000 км². Известно, что в этом районе одновременно находилось $N_ц$ = 15 объектов. Поиск производился 20 наблюдателями в течение месяца ($t_п$ = 20·30 = 600 наблюдателе-дней). При этом имело место c = 250 обнаруженных объектов; $Д_{об}$ = 5 км; $v_н$ = 200 км/день; $v_ц$ = 100 км/день.

Необходимо рассчитать отношение реальной производительности поиска к теоретической — η.

Решение. 1) По формуле (4.2.4) рассчитывается $W_{эф}$:

$$W_{эф} = \frac{250 \cdot 60\,000}{15 \cdot 600} = 1666 \text{ км}^2/\text{день}.$$

2) Из табл. 4.2.1 по $\frac{v_{ц}}{v_{н}} = 0,5$ выбирается $k_v = 0,71$.

3) По формуле (4.2.3) рассчитывается $v_{р0} = 0,71\,(200+100) = 213$ км/день.

4) По формуле (4.2.1) с учетом (4.2.3) рассчитывается $W_т = 2\cdot 5\cdot 213 = 2130$ км²/день.

5) Находится отношение $W_{эф}$ к $W_т$, т. е. $\eta = 1666/2130 = 0,78$.

4.2.2. Расчет вероятности нахождения объекта в заданной области

Вероятность нахождения объекта в заданной области есть вероятность того, что объект, курсы которого заключены между ξ_1 и ξ_2, находится на расстоянии от наблюдателя в пределах от r_1 до r_2 в диапазоне его курсовых углов от $q_{н1}$ до $q_{н2}$. При этом предполагается, что:

1) $\xi_2 > \xi_1$, $q_{н2} > q_{н1}$, $r_2 > r_1$.

2) Все три величины распределены равномерно.

Искомая вероятность рассчитывается по формуле

$$P(\xi_1 < \xi < \xi_2,\ r_1 < r < r_2,\ q_{н1} < q_н < q_{н2}) = \frac{1}{2\pi S_р}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{q_{н1}}^{q_{н2}} d\xi r dr\, dq_н. \qquad (4.2.5)$$

Пример 4.2.2. В районе площадью $S_р = 10\,000$ км² действует объект, местоположение и направление движения которого неизвестны. Курс объекта заключен в пределах $90° < \xi < 270°$.

Необходимо определить вероятность нахождения объекта в области, ограниченной расстоянием от наблюдателя $r_1 = 0$, $r_2 = 50$ км и курсовыми углами наблюдателя $q_{н1} = 45°$, $q_{н2} = 315°$.

Решение. Переходя к радианной мере ($\pi = 180°$), по формуле (4.2.5):

$$P\left(\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{3}{2}\pi,\ 0 < r < 50,\ \frac{\pi}{2} < q_н < \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{2\cdot 3,14\cdot 10\,000}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\xi \int\limits_{0}^{50} r dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} dq_н = \frac{1}{62\,800}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{2500}{2}\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0,29.$$

4.2.3. Расчет вероятности появления объектов с различных направлений относительно наблюдателя

Предполагается, что курсы объектов разновероятно распределены в пределах 0—360°.

Расчет выполняется с помощью графика (рис. 4.2.1).

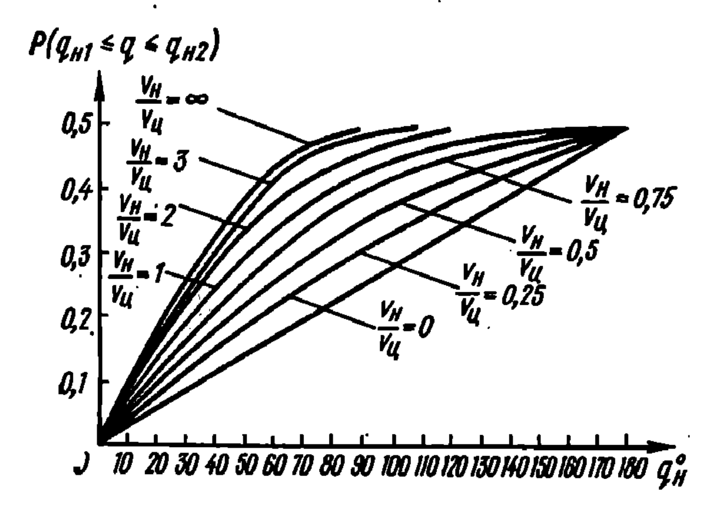


Рис. 4.2.1

Пример 4.2.3. Известно, что $v_н = 12$ км/ч, $v_ц = 24$ км/ч. Необходимо найти вероятность появления объекта в диапазоне курсовых углов наблюдателя 0—70° правого борта.

Решение. На графике (рис. 4.2.1) через точку, соответствующую $q_н = 70°$, проводим прямую, перпендикулярную оси абсцисс. Точку пересечения этой прямой с кривой графика, соответствующей $\frac{v_н}{v_ц} = \frac{12}{24} = 0,5$, сносим на ось ординат и находим, что $P(0° < q_н < 70°) = 0,25$.

4.2.4. Расчет вероятности появления объектов на различных расстояниях с разных направлений относительно наблюдателя

Предполагается, что курсы объектов равновероятно распределены от 0 до 360°. Расчет выполняется с помощью графиков (рис. 4.2.2.—4.2.5), построенных для различных

соотношений скоростей наблюдателя и объекта для зоны обнаружения радиусом в 2 единицы расстояния (на рисунках зона обнаружения заштрихована).

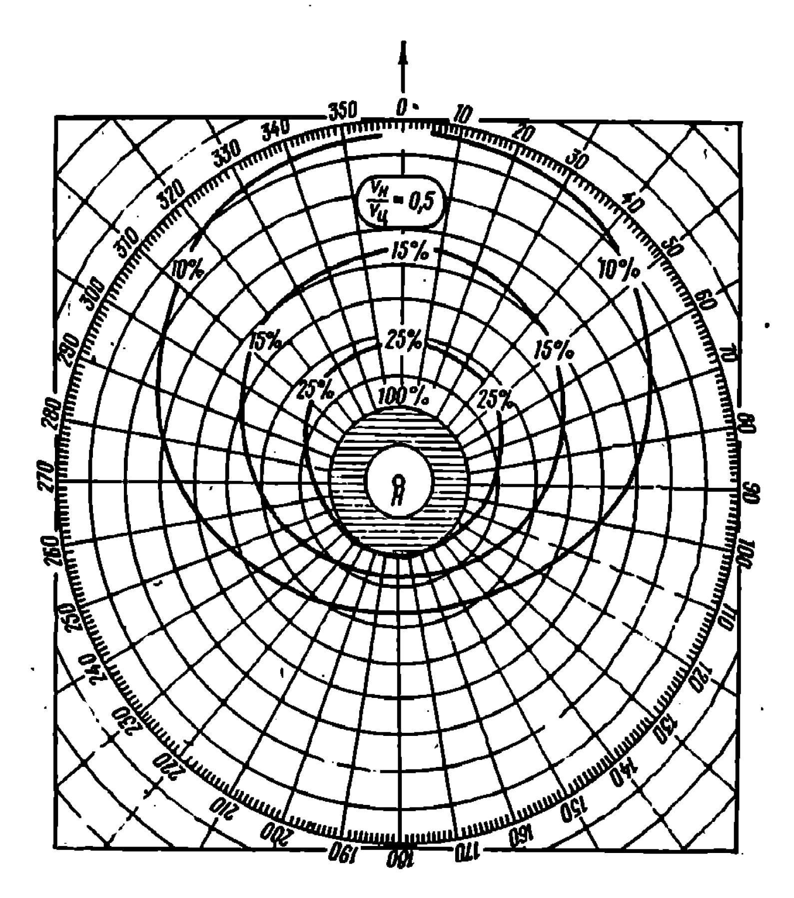


Рис. 4.2.2

Пример 4.2.4. Известно, что $v_н = 18$ км/ч, $v_ц = 12$ км/ч, дальность действия средства обнаружения $Д_{об} = 4$ км. Необходимо найти вероятность появления объекта на курсовом угле наблюдателя $q_н = 40°$ левого борта в дистанции 18 км с расчетом, что он в последующем попадает в зону действия средства обнаружения (радиус зоны равен дальности действия средства обнаружения).

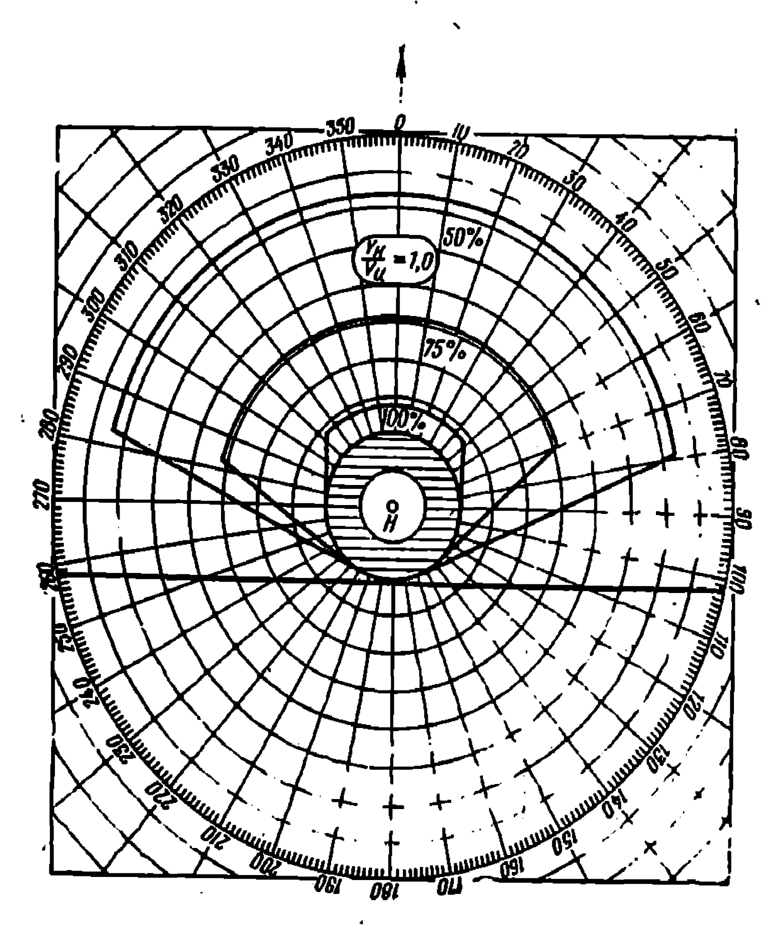


Рис. 4.2.3

Решение. Избираем для расчета график (рис. 4.2.4), соответствующий $\frac{v_н}{v_ц} = \frac{18}{12} = 1,5$.

Принимая в качестве масштаба дальность действия средства обнаружения, равную 4 км, находим в этом масштабе позицию на курсовом угле наблюдателя $q_н = 40°$ левого борта в дистанции 16 км (эта позиция отмечена на рисунке кружком).

График показывает, что заданной позиции соответствует вероятность появления объекта $P_{появ} = 25\% = 0,25$.

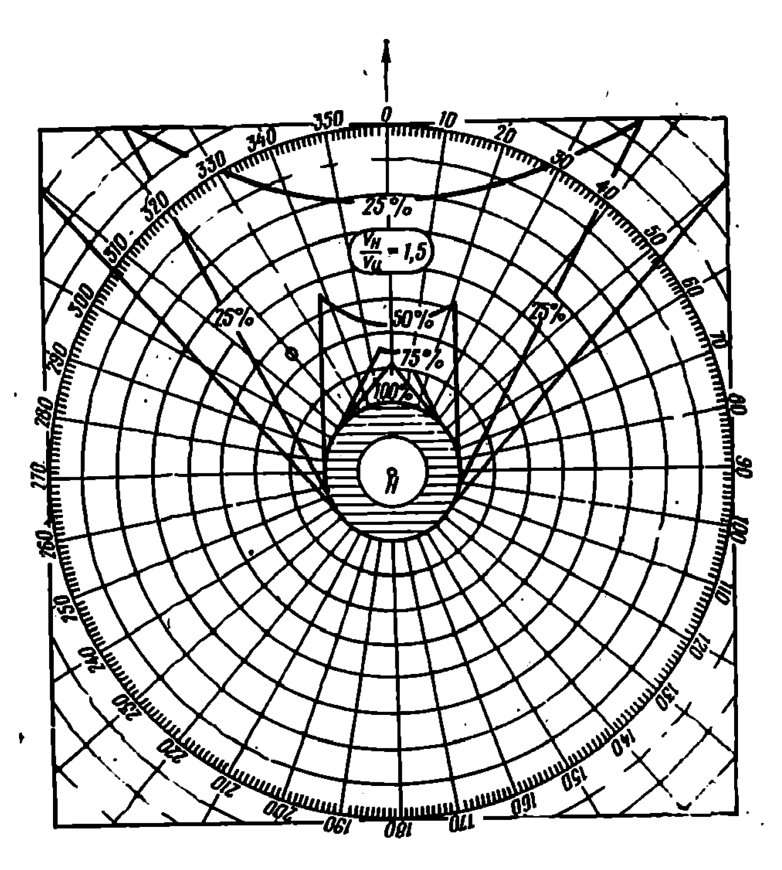

25%
$\frac{V_H}{V_Ц} = 1,5$
50%
75%
100%
75%
75%
Ц
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350

Рис. 4.2.4

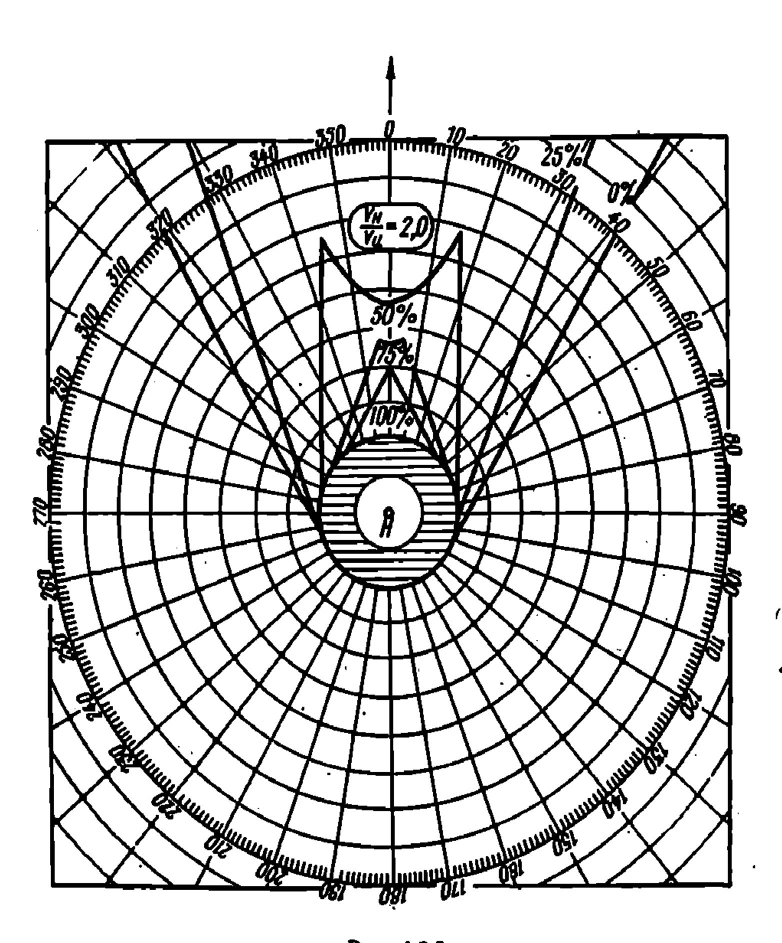

0
10
20
25%
30
0%
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
$\frac{V_H}{V_U}=2,0$
50%
75%
100%
A

Рис. 4.2.6

4.2.5. Расчет вероятности движения обнаруженного объекта определенным курсом

Предполагается, что курсы объектов равновероятно распределены от 0 до 360°. Расчет выполняется с помощью

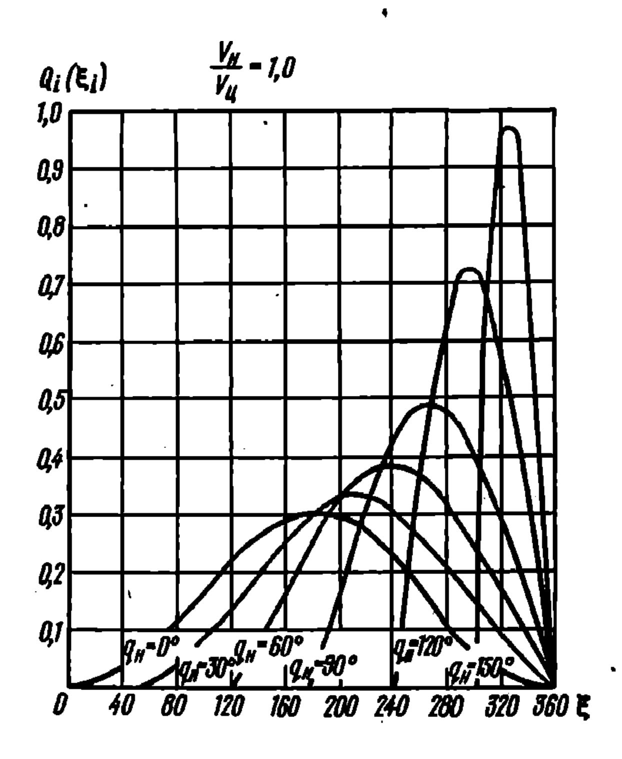


Рис. 4.2.6

графиков рис. 4.2.6—4.2.8, построенных для различных соотношений скоростей наблюдателя и объекта.

Пример 4.2.5. Объект (цель) обнаружен на курсовом угле наблюдателя $q_н = 60°$ правого борта. Известно, что $v_н = 18$ км/ч, $v_ц = 9$ км/ч.

Необходимо найти вероятность движения обнаруженного объекта курсом, составляющим с курсом наблюдателя угол $\xi = 240°$.

Решение. Избираем для расчета график, соответствующий $v_н/v_ц$ = 18/9 = 2,0 (рис. 4.2.7). Находим на графике кривую, соот-

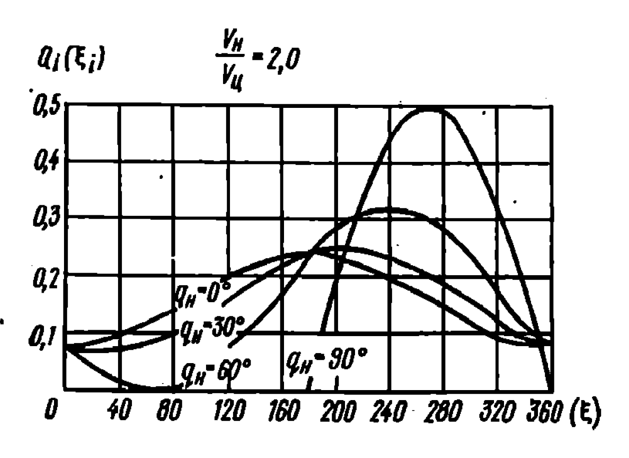


Рис. 4.2.7

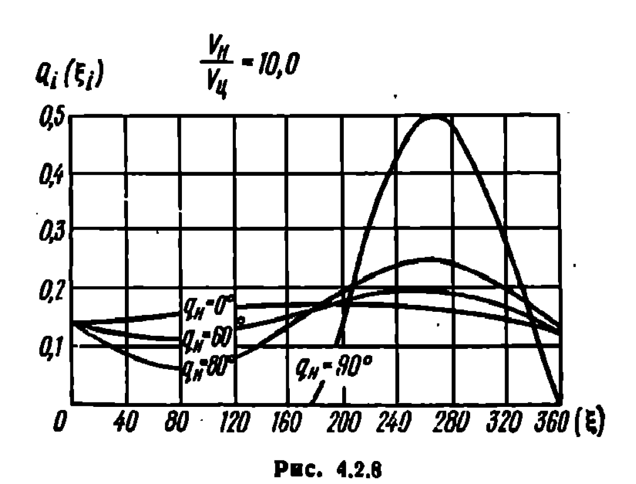


Рис. 4.2.8

ветствующую $q_н$ = 60°. Точка на этой кривой, абсцисса которой ξ = 240°, дает искомую вероятность движения объекта интересующим нас курсом: Q (ξ) = 0,31.

4.2.6. Расчет вероятности обнаружения объекта к заданному сроку

Вероятность обнаружения объекта к заданному сроку рассчитывается по формуле

$$P_{об} = 1 - \exp\left(-\frac{uT_п}{S_р}\right), \quad (4.2.6)$$

где u — производительность поиска с учетом вероятности неуклонения объекта и вероятности получения с ним контакта;

$T_п$ — время поиска (время одновременного нахождения в районе поиска площадью $S_р$ наблюдателей и объекта).

Если в процессе поиска объект пересекает район поиска, то

$$T_п = \frac{\sqrt{Д_р^2 + Ш_р^2}}{2v_ц}, \quad (4.2.7)$$

где $Д_р$ и $Ш_р$ — длина и ширина района поиска соответственно.

Расчеты по формуле (4.2.6) удобно выполнять с помощью графика (рис. 4.2.9).

$$u = Ш_{п.о} v_н P_{нук} P_к. \quad (4.2.8)$$

Вероятность неуклонения объекта ($P_{нук}$) рассчитывается по формуле

$$P_{нук} = (1 - P_{вых})(1 - P_{пр}), \quad (4.2.9)$$

где $P_{вых}$ — вероятность выхода объекта из полосы поиска;

$P_{пр}$ — вероятность прорыва объекта через полосу, просматриваемую наблюдателями.

$$P_{вых} = \begin{cases} \dfrac{2Д_{ук}\,\mathrm{tg}\,Q}{Ш_{п.о}} & \text{при } Д_{ук} > Ш_{п.о}; \\ \dfrac{Д_{ук}\,\mathrm{tg}\,Q}{Ш_{п.о}} & \text{при } Д_{ук} < Ш_{п.о}. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Рис. 4.2.9

где $Д_{ук}$ – дистанция начала уклонения объекта от наблюдателя;

Q — критический курсовой угол, определяемый по формуле

$$Q = \arcsin \frac{v_п}{v_н}. \qquad (4.2.11)$$

$$P_{пр} = \hat{\Phi}\left(\frac{d_н - 2Д_{об}}{2E}\right), \qquad (4.2.12)$$

где E — срединная ошибка в месте прорыва объекта;

$\hat{\Phi}$ — приведенная функция Лапласа, выбираемая из табл. 2 приложения.

$P_к$ — вероятность контакта с объектом, попавшим в зону действия средства наблюдения.

$$P_к = 1 - \exp\left[-\frac{kД_{об}\Omega}{(v_п + v_н)\,T_о}\right], \qquad (4.2.13)$$

где

$$k = \frac{\pi}{360 \cdot 2} = 0{,}00436;$$

Ω — сектор обследования средства наблюдения;

$T_о$ — время обследования сектора.

Пример 4.2.6. Группа в составе трех наблюдателей ($N_п = 3$) производит поиск объекта в районе размером $Д_р = 40$ км, $Ш_р = 30$ км. $T_п = 10$ ч (объект все это время находится в районе поиска), $v_п = 20$ км/ч, $v_н = 28$ км/ч, $d_н = 6$ км, $Д_{об} = 2$ км, $Д_{ук} = 6$ км, $E = 1$ км, $\Omega = 160°$, $T_о = 1$ мин.

Необходимо найти вероятность обнаружения объекта к заданному сроку.

Решение. По формуле (4.2.13) находим

$$P_к = 1 - \exp\left[-\frac{0{,}00436 \cdot 2 \cdot 160}{(20 + 28)\,0{,}0167}\right] = 1 - \exp(-1{,}74).$$

С помощью табл. XII [1] по $x = 1{,}74$ находим $P_к = 0{,}81$.

По формуле (4.2.12) находим

$$P_{пр} = \hat{\Phi}\left(\frac{6 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 1}\right) = \hat{\Phi}(1{,}0)$$

и с помощью табл. 2 приложения по $x = 1{,}0$ находим
$P_{пр} = \hat{\Phi}(x) = 0{,}50$.

Из формулы (4.2.11) имеем $Q = \arcsin\frac{20}{28} = 45{,}6°$.

Из формулы (4.2.2) имеем $Ш_{п.о} = (3-1)\,6 + 2\cdot 2 = 16$ км.

Поскольку $Д_{ук} = 6$ км $< Ш_{п.о}$, применяем формулу (4.2.10), тогда $P_{вых} = \frac{6 \lg 45{,}6°}{16} = 0{,}38$.

Из формулы (4.2.9) имеем $P_{нук} = (1 - 0{,}38)\,(1 - 0{,}50) = 0{,}31$.

Из формулы (4.2.8) имеем $u = 16\cdot 28\cdot 0{,}31\cdot 0{,}81 = 112{,}4$ км²/ч.

Из формулы (4.2.6) и с помощью табл. XII [1] находим
$P_{об} = 1 - \exp\left(-\frac{112{,}4\cdot 10}{40\cdot 30}\right) = 1 - \exp(-0{,}94) = 0{,}61$.

4.2.7. Расчет математического ожидания числа объектов, обнаруживаемых к заданному сроку

Математическое ожидание числа объектов, обнаруживаемых к заданному сроку ($МО_{об}$), рассчитывается по формуле

$$МО_{об} = N_{ц1}P_{об1} + N_{ц2}P_{об2} + \ldots + N_{цn}P_{обn} = \sum_{i=1}^{n} N_{цi}P_{обi}, \qquad (4.2.14)$$

где $N_{цi}$ — количество объектов, находящихся в i-м районе поиска;

$P_{обi}$ — вероятность обнаружения объектов в i-м районе поиска.

Пример 4.2.7. Поиск объектов (целей) производится в трех районах с вероятностями обнаружения (к заданному сроку) $P_{об1} = 0{,}72$; $P_{об2} = 0{,}35$; $P_{об3} = 0{,}61$. В каждом из районов поиска находится объектов: $N_{ц1} = 2$; $N_{ц2} = 4$; $N_{ц3} = 3$.

Необходимо рассчитать математическое ожидание числа объектов, обнаруживаемых при поиске (к заданному сроку).

Решение. Из формулы (4.2.14) имеем $МО_{об} = 2\cdot 0{,}72 + 4\cdot 0{,}35 + 3\cdot 0{,}61 = 4{,}67 \approx 5$ объектов.

4.2.8. Расчет математического ожидания времени обнаружения объекта (среднеожидаемого времени обнаружения)

Математическое ожидание времени обнаружения объекта $T_{об}$ показывает, в течение какого времени с момента начала поиска в среднем можно ожидать обнаружения объекта; $T_{об}$ рассчитывается по формуле

$$T_{об} = S_р/u. \qquad (4.2.15)$$

Пример 4.2.8. Поиск объекта производится в районе размером $Д_р = 40$ км, $Ш_р = 30$ км тремя наблюдателями ($N_н = 3$). Условия поиска соответствуют исходным данным примера 4.2.6.

Необходимо рассчитывать среднеожидаемое время обнаружения объекта.

Решение. Из формулы (4.2.15) имеем $T_{об} = 40 \cdot 30/112{,}4 = 10{,}7$ ч.

4.2.9. Расчеты, обеспечивающие заданную эффективность поиска

Для обеспечения заданной эффективности поиска $P_{об.з}$ необходимо рассчитать требуемые значения времени поиска или площади района поиска по формулам:

$$t_п = \frac{-\ln(1 - P_{об.з})\, S_р}{u}; \qquad (4.2.16)$$

$$S_р = \frac{t_п u}{-\ln(1 - P_{об.з})}. \qquad (4.2.17)$$

Пример 4.2.9. Наблюдатели ведут поиск объекта в районе площадью $S_р = 4000$ км², $u = 800$ км²/ч.

Необходимо рассчитать:

1) Требуемое время для обеспечения заданной вероятности обнаружения $P_{об.з} = 0{,}7$.

2) Каким должно быть время поиска, чтобы с заданной вероятностью $P_{об.з} = 0{,}7$ просматривать в два раза большую площадь.

3) Какую площадь могут обследовать наблюдатели с той же заданной вероятностью $P_{об.з} = 0{,}7$ при уменьшении времени поиска в три раза.

4) Каким должно быть время поиска, чтобы при сохранении остальных условий получить заданную вероятность обнаружения $P_{об.з} = 0{,}9$.

5) Каким должен быть район поиска, чтобы при сохранении остальных условий и времени поиска 6 ч получить заданную вероятность обнаружения $P_{об.з} = 0,9$.

Решение. 1) Из формулы (4.2.16) находим

$$t_п = -\ln(1-0,7)\cdot 4000/800 = -(-1,20)\cdot 4000/800 = 6 \text{ ч}.$$

2) Чтобы обследовать $2S_р$ необходимо $2t_п$, т. е. 12 ч.

3) По формуле (4.2.17)

$$S_р = \frac{\frac{6}{8}\cdot 800}{-\ln(1-0,7)} = 1338 \text{ км}^2.$$

4) Из формулы (4.2.16) имеем $t_п = -\ln(1-0,9)\cdot 4000/800 = -(-2,30)\cdot 4000/800 = 11,5$ ч.

5) По формуле (4.2.17)

$$S_р = \frac{6\cdot 800}{-\ln(1-0,9)} = 2087 \text{ км}^2.$$

4.2.10. Распределение участков района поиска между наблюдателями

Постановка задачи.

В районе площадью $S_р$ производится поиск объектов двумя типами наблюдателей:

$N_{н1}$ — количество наблюдателей первого типа;
$N_{н2}$ — количество наблюдателей второго типа;
u_1 — производительность поиска наблюдателей первого типа;
u_2 — производительность поиска наблюдателей второго типа.

Необходимо распределить район поиска между наблюдателями таким образом, чтобы математическое ожидание числа объектов, обнаруживаемых всеми наблюдателями, было наибольшим.

Расчет производится путем распределения площади между наблюдателями пропорционально их производительности поиска по формулам:

$$\frac{S_1}{S_р} = \frac{N_{н1}u_1}{N_{н1}u_1 + N_{н2}u_2}; \qquad (4.2.18)$$

$$\frac{S_2}{S_р} = \frac{N_{н2}u_2}{N_{н1}u_1 + N_{н2}u_2}; \qquad (4.2.19)$$

$$S_2 = S_р - S_1. \qquad (4.2.20)$$

где S_1 и S_2 — участки района поиска, выделяемые наблюдателями первого и второго типа соответственно.

Пример 4.2.10. Поиск в районе площадью $S_р = 1000$ км² ведут наблюдатели двух типов в количестве: $N_{н1} = 1$, $N_{н2} = 1$, $u_1 = 0{,}92$, $u_2 = 2{,}3$.

Необходимо распределить участки между наблюдателями двух типов с расчетом обеспечения максимума числа обнаруживаемых объектов.

Решение. По формуле (4.2.18)

$$\frac{S_1}{1000} = \frac{1 \cdot 0{,}92}{1 \cdot 0{,}92 + 1 \cdot 2{,}3} = 0{,}286;$$

$$S_1 = 1000 \cdot 0{,}286 = 286 \text{ км}^2.$$

По формуле (4.2.20) находим $S_2 = 1000 - 286 = 714$ км².

4.2.11. Расчеты дискретного поиска

Дискретный поиск осуществляется путем чередования обследования района при остановке наблюдателя с перемещением в следующую позицию наблюдения на высокой скорости $v_{н.\,пер}$. Во время перемещения в новую позицию наблюдение не ведется.

Время перехода из позиции в позицию $t_{пер}$ рассчитывается по формуле

$$t_{пер} = \frac{d_l}{v_{н.\,пер}}, \qquad (4.2.21)$$

где d_l — расстояние между двумя очередными позициями обследования.

Производительность поиска рассчитывается по формуле

$$u = \frac{\left(\pi Д_{об}^2 + 2Д_{об}v_п T_о\right)}{t_{пер} + T_о} N_н P_к. \qquad (4.2.22)$$

Вероятность обнаружения объекта (цели) к заданному сроку рассчитывается по формуле (4.2.6).

Пример 4.2.11. В районе площадью $S_р = 2000$ км² производится дискретный поиск тремя наблюдателями ($N_н = 3$). $d_l = 3$ км, $v_н = 30$ км/ч, $v_ц = 15$ км/ч, $Д_{об} = 2$ км, $T_о = 20$ мин, $T_п = 10$ ч, $P_к = 0{,}75$.

Необходимо рассчитать вероятность обнаружения объекта к заданному сроку.

Решение. Из формулы (4.2.21) находим $t_{пер} = 3/30 = 0{,}1$ ч.

По формуле (4.2.22)

$$u = \frac{(3{,}14 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 0{,}33)}{0{,}1 + 0{,}33} 3 \cdot 0{,}75 = 170{,}5 \text{ км}^2/\text{ч}.$$

По формуле (4.2.6) и с помощью табл. XII [1] находим

$$P_{об} = 1 - \exp\left(- \frac{170{,}5 \cdot 10}{2000}\right) = 1 - \exp(-0{,}85) = 0{,}57.$$

4.3. ПОИСК ПО ВЫЗОВУ (ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОНТАКТА)

4.3.1. Поиск на прямом галсе параллельными курсами (рис. 4.3.1)

Поиск производится при первоначальном обследовании района обнаружения объекта. Галс прокладывается так, чтобы середина строя наблюдателей прошла через исходное место обнаружения объекта. Расчет поиска:

1) Рассчитываем время перехода $t_{пер}$ в районе поиска и время запаздывания $t_{зап}$:

$$t_{пер} = \frac{Д_0 - f_ц - v_ц(t_{инф} + t_{постр}) - v_{н.\,постр} t_{постр} - Д_{об}}{v_{н.\,пер} + v_ц}; \quad (4.3.1)$$

$$t_{зап} = t_{инф} + t_{постр} + t_{пер}, \quad (4.3.2)$$

где $Д_0$ — начальное расстояние между местом обнаружения объекта и поисковой группой;

$f_ц$ — предельная ошибка в месте обнаружения объекта;

$v_ц$ — предполагаемая скорость цели;

$v_{н.\,постр}$ — скорость наблюдателей при перестроении в поисковый строй;

$v_{н.\,пер}$ — скорость наблюдателей при переходе в точку перестроения в поисковый строй;

$Д_{об}$ — средняя дальность обнаружения объекта наблюдателем;

$t_{инф}$ — время от исходного момента обнаружения объекта до начала движения наблюдателей в районе поиска;

$t_{пер}$ — время перестроения в поисковый строй.

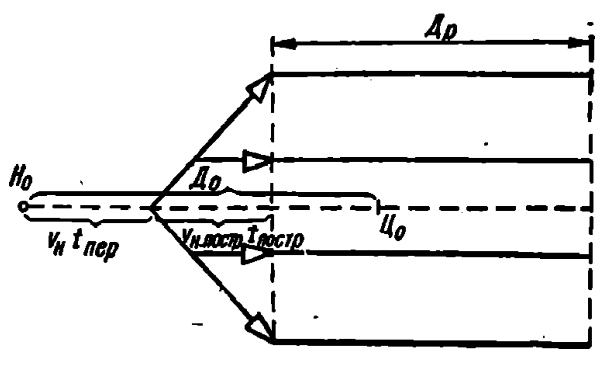


Рис. 4.3.1

2) Находим приведенное удаление $Д_{пр}$ наблюдателей от исходного места обнаружения объекта:

$$Д_{пр} = Д_0 - Д_{ук} + v_{н}t_{инф} - (v_{н.\,постр} - v_{н})\,t_{постр} - \\ - (v_{н.\,пер} - v_{н})\,t_{пер}, \qquad (4.3.3)$$

где $Д_{ук}$ — расстояние, на котором объект, первым обнаруживший наблюдателей, начинает маневр уклонения от поиска;

$v_{н}$ — скорость наблюдателей при поиске.

3) Рассчитывается ширина $Ш_{р}$ подлежащего обследованию района поиска:

$$Ш_{р} = \frac{2Д_{пр}}{\sqrt{\left(\frac{v_{н}}{v_{ц}}\right)^2 - 1}} + 2f_{ц}. \qquad (4.3.4)$$

4) Вычисляются продолжительность поиска $t_п$ (от момента завершения перестроения в поисковый строй до окончания поиска) и длина района поиска $Д_р$:

$$t_п = \frac{Д_0 + 2v_ц t_{зап} + 2f_ц}{v_н - v_ц}; \qquad (4.3.5)$$

$$Д_р = v_н t_п. \qquad (4.3.6)$$

5) Определяется наряд наблюдателей $N_{н.\,потр}$, при котором достоверна встреча с объектом:

$$N_{н.\,потр} = \frac{Ш_р + 2Д_{ук}\,\mathrm{tg}\,\theta - 2Д_{об}\sec Q}{2Д_{об}}. \qquad (4.3.7)$$

6) Находится вероятность обнаружения объекта $P_{об}$. Если число $N_н$ осуществляющих поиск кораблей равно или превышает рассчитанное по формуле (4.3.7), то

$$P_{об} = P_{нпр} P_к, \qquad (4.3.8)$$

где $P_{нпр}$ — вероятность непрорыва, вычисляемая по формуле

$$P_{нпр} = 1 - P_{пр}. \qquad (4.3.9)$$

$P_{пр}$ рассчитывается по формуле (4.2.12).

Если $N_н < N_{н.\,потр}$, то

$$P_{об} = P_{нвых} P_{нпр} P_к, \qquad (4.3.10)$$

$$P_{нвых} = \frac{\theta + \theta_2}{360}. \qquad (4.3.11)$$

где θ_2 — сектор курсов объекта, следуя которыми он попадает при сближении в полосу шириной $2F_{обс}$, где уклонение от поиска невозможно;

θ_1 — сектор курсов объекта, следуя которыми он попадает в полосу $2F_{обо}$ при удалении.

Величины θ_1 и θ_2 рассчитывать следующим образом:

— вычисляется величина $2F_{обс}$:

$$2F_{обс} = (N_н - 1)\,d_н + 2Д_{об}\sec Q - 2Д_{ук}\,\mathrm{tg}\,Q; \qquad (4.3.12)$$

— рассчитывается вспомогательный угол:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{F_{обс}}{Д_{пр} + f_ц}; \qquad (4.3.13)$$

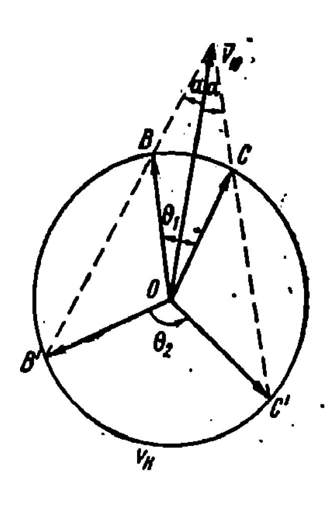


Рис. 4.3.2

— на планшете (рис. 4.3.2) из центра откладывается вектор $\bar{v}_н$ скорости наблюдателей, из его конца проводятся вспомогательные прямые, составляющие с вектором $\bar{v}_н$ угол α, и отмечаются точки B, B', C, C' их пересечения с окружностью скорости объекта $v_ц$; снимаются величины секторов $\theta_1 = COB$ и $\theta_2 = C'OB'$.

Пример 4.3.1. Группа наблюдателей в количестве 6 единиц ($N_н = 6$) получила сведения о том, что объект обнаруживался в расстоянии от них $Д_0 = 30$ км.

Необходимо произвести расчеты поиска по вызову на прямом галсе параллельными курсами при следующих исходных данных:

$f_ц = 3$ км, $Д_{об} = 2$ км, $Д_{ук} = 6$ км, $d_н = 6$ км, $v_ц = 10$ км/ч, $v_н = 20$ км/ч, $v_{н.\,пер} = v_{н.\,постр} = 30$ км/ч, $t_{инф} = 12$ мин, $t_{постр} = 18$ мин, $E = 1$ км, $P_к = 0{,}81$.

Решение. 1) По формуле (4.3.1)

$$t_{пер} = \frac{30 - 3 - 10\,(0{,}2 + 0{,}3) - 30 \cdot 0{,}3 - 2}{30 + 10} = 0{,}3 \text{ ч}.$$

2) По формуле (4.3.2) находим $t_{зап} = 0,2 + 0,3 + 0,3 = 0,8$ ч.

3) По формуле (4.3.3) находим $Д_{пр} = 30 - 6 + 20 \cdot 0,2 - (30 - 20)\,0,3 - (30 - 20)\,0,3 = 14$ км.

4) По формуле (4.3.4)

$$Ш_р = \frac{2 \cdot 14}{\sqrt{\left(\frac{20}{10}\right)^2 - 1}} + 2 \cdot 3 = 22,6 \text{ км}.$$

5) По формуле (4.3.5)

$$t_п = \frac{30 + 2 \cdot 10 \cdot 0,8 + 2 \cdot 3}{20 - 10} = 5,2 \text{ ч}.$$

6) По формуле (4.3.6) находим $Д_р = 20 \cdot 5,2 = 104$ км.

7) По формуле (4.2.11)

$$Q = \arcsin \frac{10}{20} = 30°.$$

8) По формуле (4.3.7)

$$N_{н.\,потр} = \frac{22,6 + 2 \cdot 6 \operatorname{tg} 30° - 2 \cdot 2 \sec 30°}{2 \cdot 2} \approx 6 \text{ наблюдателей}.$$

9) Поскольку $N_н = N_{н.\,потр}$, расчет $P_{об}$ производится по формуле (4.3.8). Для этого по формуле (4.2.12)

$$P_{пр} = \hat{\Phi}\left(\frac{6 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 1}\right) = \hat{\Phi}(1,0),$$

а с помощью табл. V [1] по $x = 1,0$ находим $P_{пр} = \hat{\Phi}(x) = 0,50$.

10) По формуле (4.3.9) находим $P_{нпр} = 1 - 0,50 = 0,50$.

11) По формуле (4.3.8) находим $P_{об} = 0,5 \cdot 0,81 = 0,4$.

4.3.2. Поиск с ускоренным построением на переходе (рис. 4.3.3)

Производится в случаях, когда стандартные способы перестроения не обеспечивают своевременного развертывания наблюдателей в поисковый строй. При его выполнении построение в поисковый строй начинается сразу с получением информации об объекте.

Расчет поиска:

1) Назначается пеленг развертывания $П_0$, равный пе-

ленгу из точки H_0 начала развертывания наблюдателей, на точку первоначального обнаружения объекта.

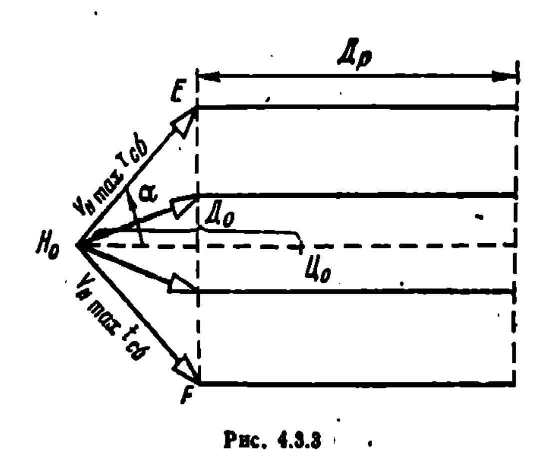


Рис. 4.3.3

2) Вычисляются вспомогательные величины Δ′, A, B, C:

$$\Delta' = f_ц + v_ц t_{инф}; \quad (4.3.14)$$

$$A = Д_0 - \Delta'; \quad (4.3.15)$$

$$B = \Delta' \operatorname{tg} \theta; \quad (4.3.16)$$

$$C = m' Д_0 \operatorname{tg} \theta; \quad (4.3.17)$$

$$m = v_ц : v_{н\,max}; \quad (4.3.18)$$

$$\theta = 45^\circ + \frac{Q}{2}, \quad (4.3.19)$$

где $v_н$ — поисковая скорость наблюдателя;
$v_{н\,max}$ — скорость хода при построении в поисковый строй.

3) Рассчитывается вспомогательный угол α:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{A - \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C - B}; \quad \alpha = \frac{\alpha}{2} \times 2. \quad (4.3.20)$$

4) Находится время сближения (перехода) $t_{сб}$:

$$t_{сб} = \frac{Д_0 - \Delta'}{v_{н\,max} \cos\alpha + v_ц}. \quad (4.3.21)$$

5) Вычисляется ширина района поиска $Ш_р$:

$$Ш_р = 2\,(v_{н\,max} t_{сб} \sin\alpha + Д_{об}). \qquad (4.3.22)$$

6) Вычисляется величина $v_{н\,max} t_{сб} \cos\alpha$ и откладывается по линии пеленга развертывания от точки $Н_0$. Через полученную точку $Н_1$ перпендикулярно прямой $Н_0Ц_0$ проводится линия конца развертывания. По ней от точки $Н_1$ откладываются в обе стороны отрезки, равные $v_{н\,max} t_{сб} \sin\alpha$. Отрезок EF делится на $(N_н - 1)$ равных частей, и наносятся точки конца развертывания всех наблюдателей. Рассчитываются их курсы и скорости при развертывании.

7) Рассчитываются время поиска $t_п$ и длина района поиска $Д_р$:

$$t_п = \frac{2\,(v_ц t_{сб} + \Delta')}{v_н - v_ц}; \qquad (4.3.23)$$

$$Д_р = v_н t_п. \qquad (4.3.24)$$

8) Необходимое количество наблюдателей рассчитывается по формуле (4.3.7). Вероятность обнаружения объекта рассчитывается по формуле (4.3.8).

Пример 4.3.2. Группа наблюдателей получила сведения о том, что объект обнаруживался в расстоянии от них $Д_0 = 30$ км.

Необходимо произвести расчеты поиска по вызову с ускоренным построением наблюдателей на переходе при следующих исходных данных: $t_ц = 2$ км, $Д_{об} = 1$ км, $v_ц = 12$ км/ч, $v_н = 18$ км/ч, $v_{н\,max} = 36$ км/ч.

Решение. 1) По формуле (1.3.14) находим $\Delta' = 2 + 12 \cdot 0{,}25 = 5$ км.

2) По формуле (4.3.15) находим $A = 30 - 5 = 25$ км.

3) По формуле (4.2.11) находим $Q = \arcsin \frac{12}{18} = 42°$.

4) По формуле (4.3.19) находим $\theta = 45 + \frac{42}{2} = 66°$.

5) По формуле (4.3.16) находим $B = 5 \operatorname{tg} 66° = 11{,}2$ км.

6) По формуле (4.3.18) находим $m = 12/36 = 0{,}33$.

7) По формуле (4.3.17) находим $C = 0{,}33 \cdot 30 \operatorname{tg} 66° = 22{,}4$ км.

8) По формуле (4.3.20)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{25-\sqrt{25^2+11{,}2^2-22{,}4^2}}{22{,}4-11{,}2}=0{,}82;$$

$$\frac{\alpha}{2}=39{,}5;\ \alpha=79^\circ.$$

9) По формуле (4.3.21)

$$t_{\text{сб}}=\frac{30-5}{36\cos 79^\circ+12}=1{,}33\text{ ч.}$$

10) По формуле (4.3.22) находим
$Ш_{\text{р}}=2\,(36\cdot1{,}33\sin 79^\circ+1)=96$ км.

11) По формуле (4.3.23)

$$t_{\text{п}}=\frac{2\,(12\cdot1{,}83+5)}{18-12}=7\text{ ч.}$$

12) По формуле (4.3.24) находим $Д_{\text{р}}=18\cdot7=126$ км.

4.3.3. Поиск по спирали

Производится в случаях, когда при первоначальном обследовании района объект не был обнаружен, а также при потере контакта с уже обнаруженным объектом. Расчеты генеральных курсов (точек поворота середины строя) выполняют следующими способами:

1-й способ (рис. 4.3.4):

— вычисляется длина радиуса-вектора R_0 начальной точки C_0 поиска:

$$R_0=\Delta'+\frac{v_{\text{ц}}\,(Д_0-\Delta')}{v_{\text{н max}}+v_{\text{ц}}};\qquad(4.3.25)$$

— откладывая R_0 от точки $Ц_0$, наносится точка C_0 начала поиска;

— вычисляется длина радиуса-вектора R_1 спирали, соответствующая его повороту на 90°:

$$R_1=R_0\exp\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}Q\right);\qquad(4.3.26)$$

— откладывая R_1 от точки $Ц_0$ в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору C_0, наносится точка C_1 поворота на следующий галс и т. д.

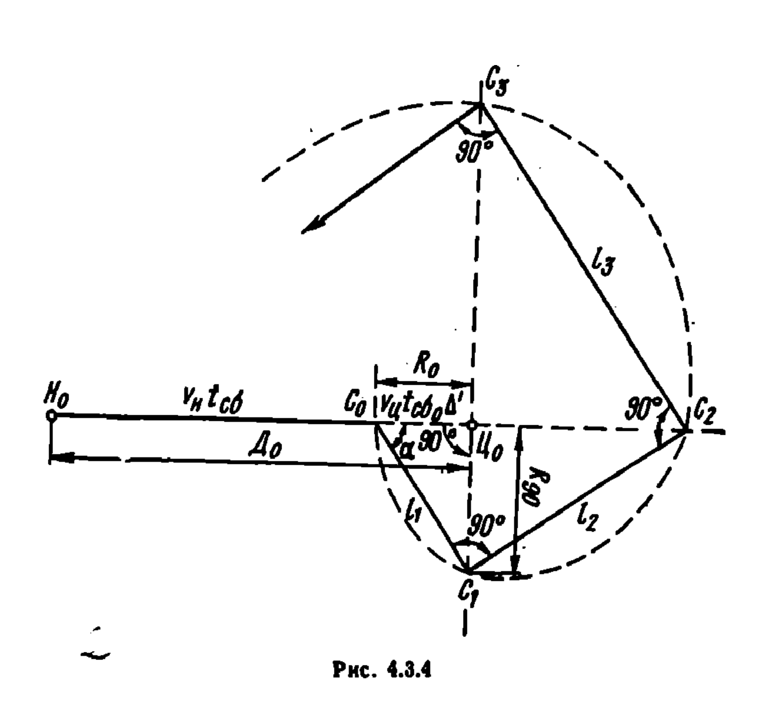


Рис. 4.3.4

2-й способ (рис. 4.3.5):

— по формуле (4.3.25) рассчитывается радиус-вектор начальной точки поиска и наносится на карту;

— задаваясь промежутком времени τ между очередными изменениями генерального курса поисковых кораблей, из точки $Ц_0$ как из центра описываются окружности радиусами:

$$R_0 + v_ц\tau;\ R_0 + 2v_ц\tau;\ R_0 + 3v_ц\tau; \ldots$$

— раствором циркуля, равным $v_м\tau$, делаются засечки на первой окружности из точки C_0, на второй окружности

из точки C_1 и т. д.; точки C_0, C_1, ... соединяются прямыми линиями.

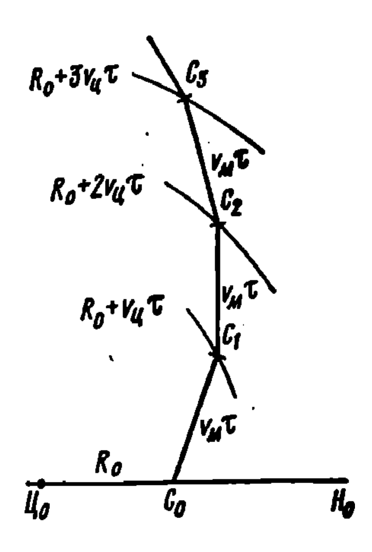


Рис. 4.3.5

4.4. ПОИСК НА РУБЕЖЕ

4.4.1. Поиск взаимообратными галсами (линейное патрулирование)

Поиск производится при любом соотношении скоростей наблюдателя и цели. Расчеты элементов поиска выполняются по следующим формулам:

$$L_{уч} = N_н l_{уч}, \qquad (4.4.1)$$

где $L_{уч}$ — общая длина участка рубежа для всех наблюдателей (рис. 4.4.1);

$l_{уч}$ — длина участка, просматриваемого одним наблюдателем.

$$l_{уч} = l_г + 2\Delta l, \qquad (4.4.2)$$

где $l_г$ — длина галса наблюдателя;
Δl — дополнительный участок; просматриваемый наблюдателем.

$$l_г = Д_{об} \sin\alpha \frac{v_н}{v_ц} \qquad (4.4.3)$$

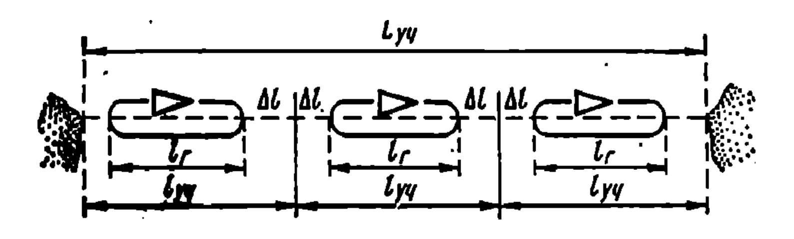


Рис. 4.4.1

или

$$l_г = \frac{Д_{об} k^2}{\sqrt{4 + k^2}}, \qquad (4.4.4)$$

где

$$k = \frac{v_н}{v_ц};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_н}{2v_ц}. \qquad (4.4.5)$$

$$\Delta l = Д_{об} \cos\alpha \qquad (4.4.6)$$

или

$$\Delta l = \frac{4Д_{об}}{\sqrt{4 + k^2}}. \qquad (4.4.7)$$

$$P_{об} = \frac{L_{уч}}{L_{уч.з}} P_к \qquad (4.4.8)$$

или

$$P_{об} = \frac{l_{уч}}{l_{уч.з}} P_к, \qquad (4.4.9)$$

где $L_{уч.з}$ и $l_{уч.з}$ — заданные размеры участков, отводимых всем и одному наблюдателю соответственно.

Пример 4.4.1. Производится поиск на рубеже четырьмя наблюдателями ($N_н = 4$). $L_{уч.з} = 30$ км, $Д_{об} = 2$ км, $v_н = 18$ км/ч, $v_ц = 12$ км/ч ($k = 1{,}5$), $P_к = 0{,}8$.

Необходимо рассчитать элементы и эффективность поиска на рубеже при линейном патрулировании.

Решение. 1) По формуле (4.4.5)

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{18}{2\cdot 12} = 36{,}8^\circ.$$

2) По формуле (4.4.3) находим $l_г = 2\sin 36{,}8^\circ \frac{18}{12} = 1{,}8$ км.

3) По формуле (4.4.6) находим $\Delta l = 2\cos 36{,}8^\circ = 1{,}6$ км.

4) По формуле (4.4.2) находим $l_{уч} = 1{,}8 + 2\cdot 1{,}6 = 5$ км.

5) По формуле (4.4.1) находим

$$L_{уч} = 4\cdot 5 = 20 \text{ км}.$$

6) По формуле (4.4.8) находим

$$P_{об} = \frac{20}{30}\,0{,}8 = 0{,}53.$$

4.4.2. Поиск перекрестными галсами (восьмеркой)

Поиск производится при не менее чем двукратном превосходстве в скорости наблюдателя по сравнению с объектом.

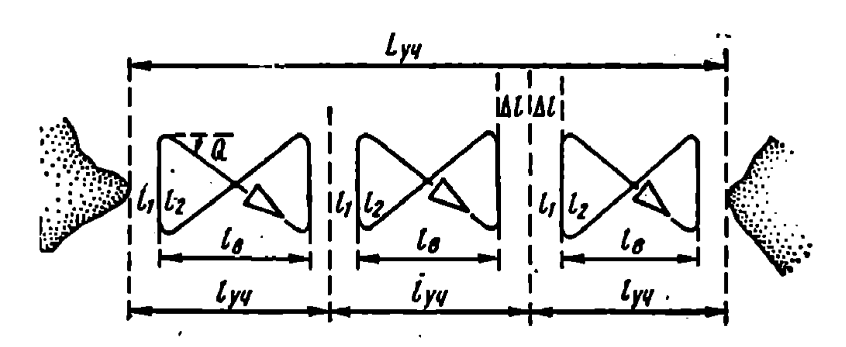


Рис. 4.4.3

Расчеты элементов поиска выполняются по следующим формулам (рис. 4.4.2):

$L_{уч}$ рассчитывается по формуле (4.4.1).

$$l_{уч} = l_в + 2\Delta l, \quad (4.4.10)$$

где $l_в$ — длина восьмерки.

$$l_в = 2Д_{об}k\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sin\alpha_в, \quad (4.4.11)$$

где

$$k = \frac{v_н}{v_ц};$$

$$\alpha_в = \operatorname{arctg} k\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}. \quad (4.4.12)$$

$$\Delta l = Д_{об}\cos\alpha_в. \quad (4.4.13)$$

$$l_1 = \frac{2Д_{об}k\sin\alpha_в}{k+1}; \quad (4.4.14)$$

$$l_2 = \frac{l_1}{\sin Q} = kl_1, \quad (4.4.15)$$

где l_1 и l_2 — короткий и длинный галсы восьмерки соответственно.

Пример 4.4.2. Производится поиск на рубеже четырьмя наблюдателями ($N_н = 4$). $L_{уч.з} = 30$ км, $Д_{об} = 2$ км, $v_н = 18$ км/ч, $v_ц = 9$ км/ч ($k = 2$), $P_к = 0{,}8$.

Необходимо рассчитать элементы и эффективность поиска на рубеже при перекрестном патрулировании.

Решение. 1) По формуле (4.4.12)

$$\alpha_в = \operatorname{arctg} 2\sqrt{\frac{2-1}{2+1}} = 49{,}3°.$$

2) По формуле (4.4.11)

$$l_в = 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{\frac{2-1}{2+1}}\sin 49{,}3° = 3{,}48 \text{ км}.$$

3) По формуле (4.4.13) находим $\Delta l = 2 \cos 49{,}3^{\circ} = 1{,}32$ км.

4) По формуле (4.4.10) находим $l_{уч} = 3{,}48 + 2 \cdot 1{,}32 = 6{,}12$ км.

5) По формуле (4.4.1) находим $L_{уч} = 4 \cdot 6{,}12 = 24{,}48$ км.

6) По формуле (4.4.8) находим $P_{об} = \frac{24{,}48}{30} 0{,}8 = 0{,}65$.

5. МАНЕВРИРОВАНИЕ ДЛЯ ЗАНЯТИЯ ПОЗИЦИИ И УКЛОНЕНИЯ

5.1. МАНЕВРИРОВАНИЕ ДЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ ДИСТАНЦИИ

5.1.1. Сближение вплотную (общий случай)

Сущность задачи заключается в следующем. Известны взаимное положение маневрирующего и цели в начальный момент времени, а также курс и скорость цели. Необходимо найти такой курс маневрирующего, чтобы он, идя этим курсом с заданной скоростью, оказался по дистанции и курсовому углу (пеленгу) в новой позиции относительно цели. Необходимо найти также время маневра.

А. Аналитическое решение.

$$K_м = П_{мц} \pm q_{мо} \qquad (5.1.1)$$

(«+», если $q_{мо}$ левого борта, «—», если $q_{мо}$ правого борта),

$$q_{мо} = \arcsin\left(\frac{\sin q_{цо}}{m}\right) \qquad (5.1.2)$$

(по данной формуле рассчитана табл. 5.1.1);

$$m = \frac{v_м}{v_ц}; \qquad (5.1.3)$$

$$t = \frac{Д_0}{v_ц \cos q_ц + v_м \cos q_м}, \qquad (5.1.4)$$

где $K_м$ — курс маневрирующего;

$П_{мц}$ — пеленг «маневрирующий — цель»;

$q_м$ и $q_ц$ — текущие курсовые углы маневрирующего и цели соответственно;
$q_{мо}$ и $q_{цо}$ — начальные курсовые углы маневрирующего и цели соответственно;
$v_м$ и $v_ц$ — скорости маневрирующего и цели соответственно.

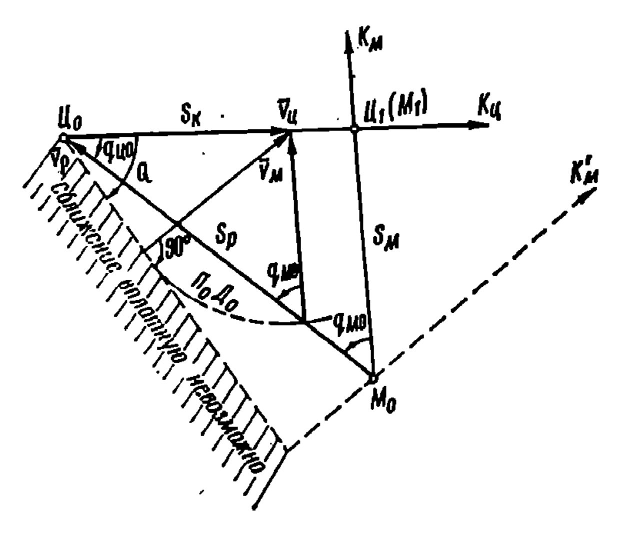


Рис. 5.1.1

Пример 5.1.1. Маневрирующий находится на курсовом угле цели $q_{цо} = 30°$ правого борта; $v_м = 20$ уз, $v_ц = 30$ уз, $Д_0 = 300$ миль, $П_{мц} = 315°$. Необходимо рассчитать курс маневрирующего, приводящий его к сближению вплотную с целью, а также время маневра.

Решение. Из табл. 5.1.1 по $1/m = v_ц/v_м = 1{,}5$ и $q_ц = 30°$ выбирается $q_м = 48°$ левого борта (как видно из рис. 5.1.1, борт маневрирующего противоположен борту цели).

По формуле (5.1.1) находим $К_м = 315° + 48° = 363° = 3°$.

По формуле (5.1.4)

$$t = \frac{300}{30 \cos 30° + 20 \cos 48°} = 4{,}52 \text{ ч}.$$

Б. Графическое решение (рис. 5.1.1):

— наносятся начальные места маневрирующего и цели, проводится линия начального пеленга $Ц_0М_0$;

Таблица 5.1.1

Курсовые углы маневрирующего $q_м$, при которых он сближается с целью вплотную

$q_ц$		1/m = $v_ц/v_м$: 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0°		0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
10°	170°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	160	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
30	150	3	6	8	11	14	17	20	23	27	30	33	37	40	44	48					
40	140	4	7	11	15	19	23	27	31	35	40	45	56	57	64	75					
50	130	4	9	13	18	22	27	32	38	44	50	57	67	84							
60	120	5	10	15	20	26	31	37	44	57	60	73									
70	110	5	11	16	22	28	34	41	49	58	70										
80	100	6	11	17	23	29	36	43	52	62	80										
90		6	11	17	23	30	37	44	53	64	90										

Сближение вплотную невозможно

— из точки $\overline{Ц_0}$ проводится линия курса цели, по ней откладывается $\overline{v_ц}$;

— из конца $\overline{v_ц}$ на линии $Ц_0М_0$ делается засечка раствором циркуля, равным $v_м$, чем определяется направление $\overline{v_м}$;

— из точки $М_0$ проводится прямая, параллельная $\overline{v_м}$, — линия курса маневрирующего; пересечение этой линии с курсом цели дает точку $Ц_1$ $(М_1)$, в которой произойдет сближение вплотную;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.1.2. Сближение вплотную при движении навстречу друг другу

Сущность задачи ясна из рис. 5.1.2. В этом случае $q_м = q_ц = 0$.

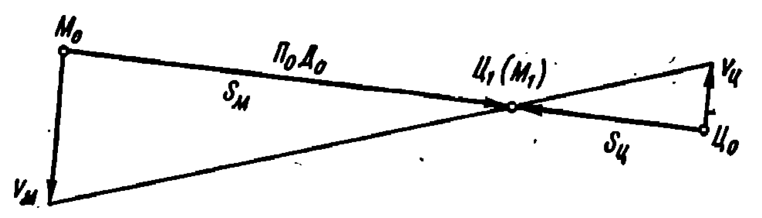


Рис. 5.1.2

А. Аналитическое решение.

$$К_м = П_{мц}; \quad (5.1.5)$$

$$t = \frac{Д_0}{v_ц + v_м}. \quad (5.1.6)$$

Пример 5.1.2. Маневрирующий находится на $q_ц = 0°$ в $Д_0 = 100$ миль. $v_м = 20$ уз, $v_ц = 30$ уз, $П_{мц} = 90°$. Необходимо рассчитать курс маневрирующего, приводящий его к сближению вплотную с целью, а также время маневра.

Решение. По формуле (5.1.5) находим $К_м = 90°$.

По формуле (5.1.6)

$$t = \frac{100}{30 + 20} = 2 \text{ ч}.$$

Б. Графическое решение (рис. 5.1.2):

— наносятся места маневрирующего и цели; проводится линия начального пеленга $Ц_0М_0$;

— из точек $Ц_0$ и $М_0$ по направлениям, перпендикулярным $Ц_0М_0$, в противоположные стороны откладываются $\bar{v}_ц$ и $\bar{v}_м$ соответственно;

— концы $\bar{v}_ц$ и $\bar{v}_м$ соединяются прямой линией; пересечение этой линии с линией начального пеленга $Ц_0М_0$ дает точку $Ц_1(М_1)$, в которой произойдет сближение вплотную;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.1.3. Сближение вплотную при движении друг за другом

Сущность задачи ясна из рис. 5.1.3. В этом случае $q_ц = 180°$, $q_м = 0$.

А. Аналитическое решение.

Величина $К_м$ рассчитывается по формуле (5.1.5).

$$t = \frac{Д_0}{v_м - v_ц}. \tag{5.1.7}$$

Пример 5.1.3. Маневрирующий находится на $q_ц = 180°$ в $Д_0 = 100$ миль, $v_м = 30$ уз, $v_ц = 20$ уз, $П_{мц} = 90°$.

Необходимо рассчитать курс маневрирующего, приводящий его к сближению вплотную с целью, а также время маневра.

Решение. 1) По формуле (5.1.5) находим $К_м = 90°$.

2) По формуле (5.1.7)

$$t = \frac{100}{30 - 20} = 10 \text{ ч}.$$

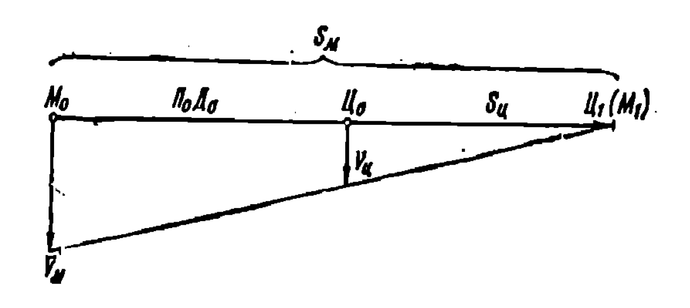


Рис. 5.1.3

Б. Графическое решение (рис. 5.1.3):

— наносятся места маневрирующего и цели; проводится линия начального пеленга $Ц_0M_0$;

— из точек $Ц_0$ и M_0 по направлению, перпендикулярному $Ц_0M_0$, в одну сторону откладываются $\bar{v}_ц$ и $\bar{v}_м$ соответственно;

— концы $\bar{v}_ц$ и $\bar{v}_м$ соединяются прямой линией; пересечение этой линии с продолжением линии начального пеленга $Ц_0M_0$ дает точку $Ц_1(M_1)$, в которой произойдет сближение вплотную;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.1.4. Возможность сближения вплотную

При $v_ц < v_м$ сближение вплотную возможно всегда, так как в этом случае

$$0 < q_{мо} < 90° \left(\sin q_{мо} = \frac{v_ц}{v_м} \sin q_ц > 1 \right).$$

При $v_ц > v_м$ различаются два случая:

1) если $q_{цо} > 90°$, сближение вплотную невозможно;

2) если $q_{цо} < 90°$, возможно лишь тогда, когда

$$\sin q_{мо} = \frac{v_ц}{v_м} \sin q_{цо} < 1.$$

Это имеет место при

$$q_{цо} = \arcsin \frac{v_м}{v_ц} = Q, \qquad (5.1.8)$$

где Q — критический курсовой угол — предельный, при котором маневрирующий, обладая меньшей скоростью, может сближаться вплотную с целью (рис. 5.1.1). По формуле (5.1.8) рассчитана табл. 5.1.2.

При нахождении маневрирующего на внешней стороне критического курсового угла сближение его с целью вплот-

ную осуществляется курсом, перпендикулярным этой стороне (рис. 5.1.1).

А. Аналитическое решение. Величина Q рассчитывается по формуле (5.1.8) или по табл. 5.1.2.

Если $q_{цо} < Q$, сближение вплотную возможно, если $q_{цо} > Q$, сближение вплотную невозможно.

Пример 5.1.4. Цель следует курсом 90°, $v_ц = 24$ уз. Маневрирующий находится на курсовом угле цели $q_{цо} = 60°$ правого борта в дистанции $Д_0 = 6$ миль, $v_м = 18$ уз. Необходимо определить возможность сближения маневрирующего с целью вплотную.

Решение. По формуле (5.1.8)

$$Q = \arcsin \frac{18}{24} = \arcsin 0,75 = 48°.$$

Так как 60° > 48°, то сближение вплотную невозможно.

Б. Графическое решение показано на рис. 5.1.1.

5.1.5. Изменение дистанции при постоянстве пеленга

Сущность задачи (рис. 5.1.4) заключается в том, что маневрирующий корабль ложится на курс сближения

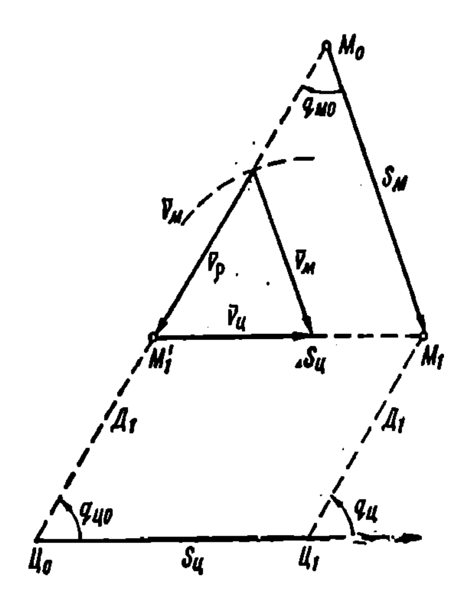


Рис. 5.1.4

вплотную с другим кораблем и следует этим курсом до тех пор, пока расстояние между кораблями не сократится до заданной величины $Д_з$.

Таблица 5.1.2

Критические курсовые углы цели Q, при которых маневрирующий, обладающий меньшей скоростью, может сближаться вплотную с целью

$m = \frac{v_м}{v_ц}$	$Q°$	$m = \frac{v_м}{v_ц}$	$Q°$
0,05	3	0,55	33,5
0,10	6	0,60	36,5
0,15	9	0,65	40,5
0,20	12	0,70	44,5
0,25	14,5	0,75	48,5
0,30	17,5	0,80	53
0,35	20,5	0,85	58
0,40	23,5	0,90	62
0,45	26,5	0,95	72
0,50	30	1,00	90

А. Аналитическое решение. Курс маневрирующего рассчитывается так же, как и при сближении вплотную, — по формулам (5.1.1); (5.1.2); (5.1.3); табл. 5.1.1. Расчет курса для уменьшения дистанции при постоянстве пеленга удобно производить также с помощью номограммы рис. 5.1.5.

Пример 5.1.6. Маневрирующий находится на курсовом угле цели $q_{цо} = 80°$ правого борта, $Д_0 = 100$ миль, $v_м = 30$ уз, $v_ц = 15$ уз, $П_{мц} = 0°$, $Д_з = 50$ миль.

Необходимо рассчитать курс маневрирующего, приводящий его на $Д_з$ без изменения пеленга.

Решение. С помощью номограммы рис. 5.1.5 находим по $v_м/v_ц = 2$ и $q_{цо} = 80°$ угол между курсами маневрирующего и

цели $\varphi = 180 - (q_{мо} + q_{цо}) = 70°$. Откуда $q_{мо} = 30°$ левого борта (борт маневрирующего противоположен борту цели). Ма-

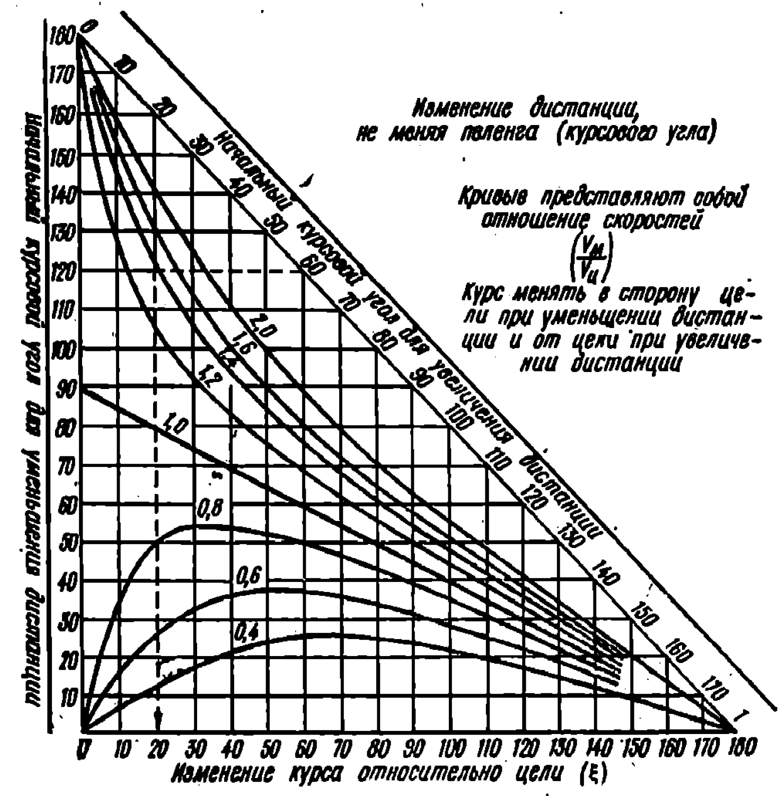


Рис. 5.1.5

неврирующий следует рассчитанным курсом до тех пор, пока дистанция не сократится до $Д_з$:

$$t = \frac{Д_0 - Д_1}{v_ц \cos q_ц + v_м \cos q_м}. \tag{5.1.9}$$

В условиях примера 5.1.2

$$t = \frac{100 - 50}{15 \cos 80° + 30 \cos 30°} = 674 \text{ мин} = 9 \text{ ч } 34 \text{ мин}.$$

Б. Графическое решение (рис. 5.1.4):

— наносятся места цели и маневрирующего в момент начала маневра;

— откладывается от начального места цели по линии начального пеленга $Ц_0 М_0$ дистанция, на которую необходимо сблизиться; получается заданная относительная позиция маневрирующего $М_1'$;

— решается задача сближения с точкой $М_1'$ вплотную; найденная точка $М_1$ представляет собой место маневрирующего в момент конца маневра;

— из точки $М_1$ проводится прямая, параллельная линии начального пеленга, до пересечения с линией курса цели, это дает ее место $Ц_1$ в конце маневра;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

Решение задачи для случая удаления при постоянстве пеленга аналогично рассмотренному с некоторыми особенностями:

— при аналитическом решении $q_м$ равен дополнению до 180° курсового угла, рассчитанного по формуле (5.1.2) или выбранного из табл. 5.1.1. Для этого расчета удобно воспользоваться также номограммой рис. 5.1.5.

— время маневра

$$t = \frac{Д_1 - Д_0}{v_ц \cos q_ц + v_м \cos q_м}; \qquad (5.1.10)$$

— при графическом решении заданная относительная позиция находится от цели дальше, чем начальная; с этой позицией и рассчитывается сближение вплотную.

5.1.6. Сближение на заданную дистанцию в кратчайший срок

Сущность задачи (рис. 5.1.6) заключается в следующем. Маневрирующий в начальный момент находится на курсовом угле цели $q_{ц0}$ в расстоянии от нее $Д_0$.

Необходимо найти такой курс маневрирующего, чтобы он в минимально возможное при данных скоростях кораблей время сблизился с целью на заданное расстояние $Д_з$. Найти также время маневра.

А. Аналитическое решение.

Величина $K_м$ рассчитывается по формуле (5.1.1).

$$q_{мо} = q'_{мо} - a; \tag{5.1.11}$$

$$q'_{мо} = \arcsin\left(\frac{\sin q'_{цо}}{m}\right). \tag{5.1.12}$$

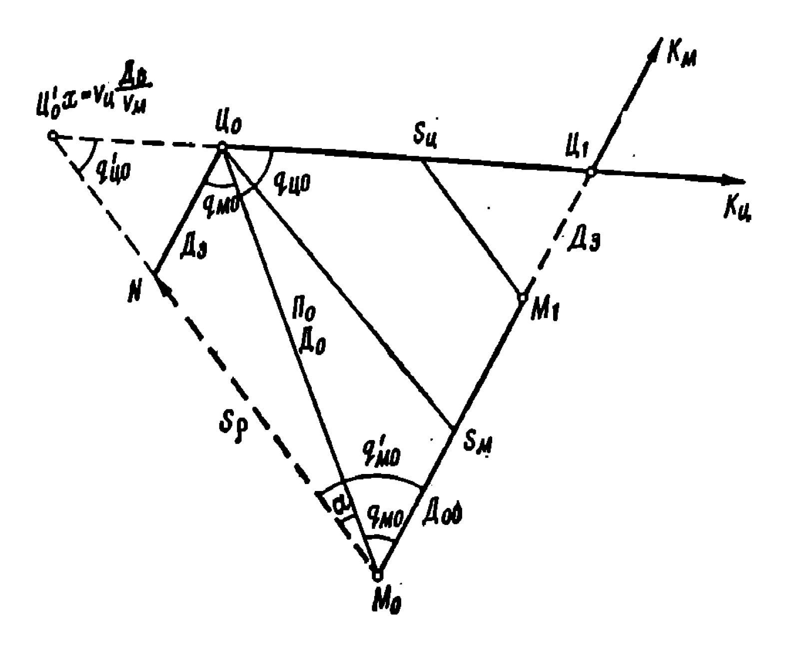


Рис. 5.1.6

$q'_{мо}$ может быть получен также из табл. 5.1.1 или из номограммы (рис. 5.1.5). Для входа в табл. 5.1.1 вместо $q_ц$ берется

$$q'_{цо} = q_{цо} - a, \tag{5.1.13}$$

где

$$a = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\mu}{m}\sin q_{цо}}{1 + \frac{\mu}{m}\cos q_{цо}}. \tag{5.1.14}$$

По данной формуле рассчитана табл. 5.1.3.

Таблица 5.1.3

Значения вспомогательного угла α

$q_{по}$	m/μ												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	3,0
10°	9°	8°	7°	7°	7°	6°	6°	6°	5°	5°	4°	3°	3°
20	18	17	16	14	13	12	12	11	11	10	8	7	5
30	27	25	23	21	20	18	18	17	16	15	12	10	7
40	37	34	31	29	27	26	24	22	21	20	16	13	10
50	46	42	39	36	34	30	30	28	27	25	19	16	12
60	55	51	47	44	41	38	36	34	32	30	23	19	14
70	65	60	56	52	48	45	42	40	37	35	27	22	15
80	75	75	64	60	56	52	49	45	43	40	31	24	17
90	84	79	73	68	64	59	55	51	48	45	34	27	18
100		88	83	77	72	67	62	58	54	50	37	28	19
110				86	80	75	69	64	59	55	39	30	20
120						83	77	71	65	60	41	30	20
130	Сближение на $Д_з$ невозможно						86	79	71	65	42	29	18
140								87	78	70	41	35	21
150									88	77	39	24	14
160										80	32	18	9
170										85	19	10	5

$$\mu = \frac{Д_з}{Д_0}; \qquad (5.1.15)$$

$$t = \frac{Д_0'}{v_ц \cos q_{цо}' + v_м \cos q_{мо}'} - \frac{Д_з}{v_м}; \qquad (5.1.16)$$

$$Д_0' = \frac{x \sin q_{цо}}{\sin \alpha}; \qquad (5.1.17)$$

$$x = \frac{v_ц}{v_м} Д_з. \qquad (5.1.18)$$

Пример 5.1.6. Маневрирующий находится на курсовом угле цели $q_{цо} = 70^\circ$ правого борта. $Д_0 = 100$ миль, $v_м = 30$ уз, $v_ц = 15$ уз, $П_{мц} = 340^\circ$, $Д_з = 75$ миль. Необходимо рассчитать курс маневрирующего, приводящий его на $Д_з$ в кратчайший срок, и время маневра.

Решение. 1) Из табл. 5.1.3 по $m/\mu = 2{,}67$ и $q_{цо} = 70^\circ$ находим $\alpha = 17^\circ$.

2) По формуле (5.1.13) находим $q_{цо}' = 70 - 17 = 53^\circ$.

3) Из табл. 5.1.1 по $1/m = 0{,}5$ и $q_{цо}' = 53^\circ$ находим $q_{мо}' = 23^\circ$.

4) По формуле (5.1.11) определяем $q_{мо} = 23 - 17 = 6^\circ$ левого борта (как видно из рис. 5.1.6, борт маневрирующего противоположен борту цели).

5) Из формулы (5.1.1) величина $К_м = 340 + 6 = 346^\circ$.

6) По формуле (5.1.18) величина $x = \frac{15}{30} 75 = 37{,}5$ миль.

7) По формуле (5.1.17) величина $Д_0 = \frac{37{,}5 \sin 70^\circ}{\sin 17^\circ} = 120$ миль.

8) По формуле (5.1.16)

$$t = \frac{120}{15 \cos 53^\circ + 30 \cos 23^\circ} - \frac{75}{30} = 46 \text{ мин.}$$

Б. Графическое решение (рис. 5.1.6):

— рассчитывается по формуле (5.1.18) вспомогательная величина x;

— величина x откладывается от начального места цели

в направлении, противоположном ее курсу; находится точка $Ц_0'$;

— рассчитывается курс маневрирующего для сближения с точкой $Ц_0$ вплотную;

— точка пересечения линии этого курса с линией курса цели есть место цели $Ц_1$ в момент окончания маневрирования;

— от точки $Ц_1$ по направлению начальной позиции маневрирующего $М_0$ откладывается $Д_з$; получается место маневрирующего $М_1$ в момент конца маневра;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.1.7. Удаление на заданную дистанцию в кратчайший срок

Сущность задачи (рис. 5.1.7) заключается в следующем. Маневрирующий в начальный момент находится на кур-

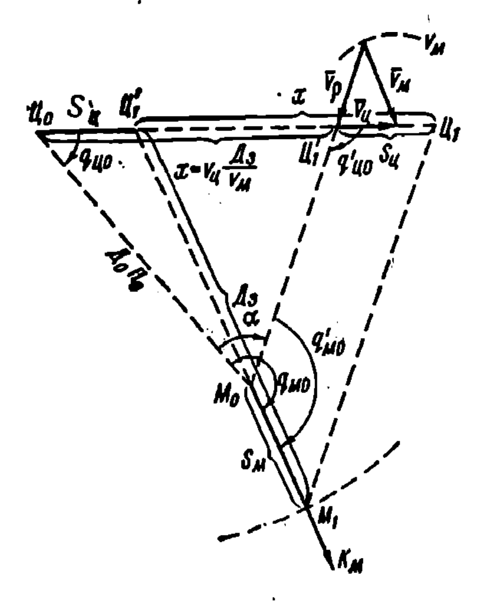


Рис. 5.1.7

совом угле цели $q_{ц0}$ в расстоянии от нее $Д_0$. Необходимо найти такой курс маневрирующего, чтобы он в минимально возможное при данных скоростях кораблей время удалился

от цели на заданное расстояние $Д_з$. Необходимо также найти время маневра.

А. Аналитическое решение.

$К_м$ рассчитывается по формуле (5.1.1);

$$q_{мо} = q'_{мо} + a, \qquad (5.1.19)$$

$q'_{мо}$ рассчитывается по формуле (5.1.12), $q'_{мо}$ может быть получен также из табл. 5.1.1 либо из номограммы на рис. 5.1.5 (случай удаления). При этом для входа в таблицу вместо $q_ц$ берется

$$q'_{цо} = q_{цо} + a, \qquad (5.1.20)$$

где

$$a = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\mu}{m} \sin q_{цо}}{1 - \frac{\mu}{m} \cos q_{цо}}. \qquad (5.1.21)$$

Для расчетов по данной формуле можно пользоваться табл. 5.1.2, беря в качестве угла $q_{цо}$ его дополнение до 180°.

$$t = \frac{Д'_0}{v_ц \cos q'_{цо} + v_м \cos q'_{мо}} + \frac{Д_з}{v_м}. \qquad (5.1.22)$$

$Д'_0$ рассчитывается по формулам (5.1.17) и (5.1.18).

Пример 5.1.7. Маневрирующий находится на курсовом угле цели $q_{цо} = 60°$ правого борта. $Д_0 = 40$ миль, $v_м = 30$ уз, $v_ц = 15$ уз, $П_{мц} = 320°$, $Д_з = 80$ миль. Необходимо рассчитать курс маневрирующего, приводящий его на $Д_з$ в кратчайший срок, и время маневра.

Решение. 1) Из табл. 5.1.3 по $m/\mu = 1$ и $q'_{цо} = 180 - 60 = 120°$ находим $a = 60°$.

2) По формуле (5.1.20) определяем $q'_{цо} = 60 + 60 = 120°$.

3) Из табл. 5.1.1 по $1/m = v_ц/v_м = 0{,}5$ и $q'_{цо} = 120°$ находим $q'_{мо} = 180 - 26 = 154°$.

4) По формуле (5.1.19) находим $q_{мо} = 154 + 60 = 214°$ левого борта (как видно из рис. 5.1.7, борт маневрирующего противоположен борту цели).

5) Из формулы (5.1.1) находим $K_м = 320 + 214 = 174°$.

6) По формуле (5.1.18) находим $x = \frac{15}{30} 80 = 40$ миль.

7) По формуле (5.1.17)

$$Д'_0 = \frac{40 \sin 60°}{\sin 60°} = 40 \text{ миль}.$$

8) По формуле (5.1.22)

$$t = \frac{40}{15 \cos 120° + 30 \cos 154°} + \frac{80}{30} = 90 \text{ мин}.$$

Б. Графическое решение (рис. 5.1.7):

— рассчитывается по формуле (5.1.18) вспомогательная величина x;

— величина x откладывается от начального места цели в направлении ее курса; наносится точка $Ц'_0$;

— рассчитывается курс маневрирующего для сближения с точкой $Ц_0$ вплотную;

— точка пересечения линии этого курса (в противоположном направлении) с линией курса цели есть место цели $Ц_1$ в момент окончания маневрирования;

— от точки $Ц_1$ по направлению начальной позиции маневрирующего $М_0$ откладывается $Д_з$; получается место маневрирующего $М_1$ в момент конца маневра;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.1.8. Сближение на кратчайшее расстояние с быстроходной целью

Сущность задачи (рис. 5.1.8) состоит в том, что маневрирующий сближается с целью, имеющей преимущество в скорости ($v_м < v_ц$), на минимально возможное при данном отношении скоростей кратчайшее расстояние $Д_{кр}$. Необходимо найти курс маневрирующего и время маневра. Кроме того, необходимо определить величину кратчайшего расстояния.

А. Аналитическое решение. Величина $K_м$ рассчитывается по формуле (5.1.1);

$$q_{мо} = 90 - (q_{цо} - Q); \qquad (5.1.23)$$

$$t = \frac{Д_0 \cos (q_{цо} - Q) \operatorname{tg} Q}{v_м}. \qquad (5.1.24)$$

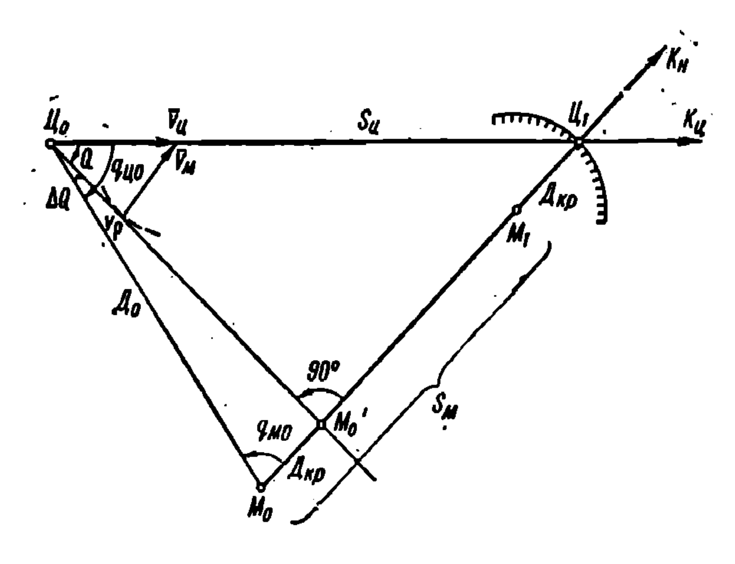


Рис. 5.1.8

Величина Q рассчитывается по формуле (5.1.8) или берется из табл. 5.1.2.

$$Д_{кр} = Д_0 \cos q_{мо}. \qquad (5.1.25)$$

Пример 5.1.8. Маневрирующий находится на $q_{цо} = 70°$ правого борта. $Д_0 = 100$ миль, $v_ц = 30$ уз, $v_м = 15$ уз. Необходимо рассчитать курс маневрирующего, приводящий его на $Д_{кр}$, время маневра, а также величину $Д_{кр}$.

Решение. 1) По формуле (5.1.8)

$$Q = \arcsin \frac{15}{30} = 30°.$$

2) По формуле (5.1.23) определяем $q_{мо} = 90 - (70 - 30) = 50°$ левого борта (борт маневрирующего противоположен борту цели).

3) По формуле (5.1.24)

$$t = \frac{100 \cos (70^\circ - 30^\circ) \operatorname{tg} 30^\circ}{15} = \frac{100 \cdot 0{,}766 \cdot 0{,}577}{15} = 2{,}9 \text{ ч.}$$

4) По формуле (5.1.25) находим $Д_{кр} = 100 \cos 50^\circ = 100 \cdot 0{,}643 = 64{,}3$ мили.

Б. Графическое решение (рис. 5.1.8):

— при начальном месте цели строится критический курсовой угол Q;

— из точки M_0 проводится линия курса маневрирующего, перпендикулярная границе критического курсового угла; точка $Ц_1$ ее пересечения с линией курса цели есть ее место в момент прихода на $Д_{кр}$;

— $Д_{кр}$ есть длина отрезка M_0M_0';

— место маневрирующего в момент прихода на $Д_{кр}$ (точка M_1) находится путем откладывания отрезка, равного $Д_{кр}$, от точки $Ц_1$ по направлению к M_0;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.1.9. Возможность сближения на заданное (кратчайшее) расстояние (рис. 5.1.8)

При $v_ц < v_м$ сближение на заданное расстояние возможно всегда. При $v_ц > v_м$ сближение на заданное расстояние возможно лишь в том случае, если

$$Д_з > Д_{кр}. \tag{5.1.26}$$

Это же условие можно выразить и через курсовой угол цели; сближение на заданное расстояние возможно лишь в том случае, если

$$q_{цо} < Q + \Delta Q, \tag{5.1.27}$$

$$\Delta Q = \arcsin \frac{Д_з}{Д_0}, \tag{5.1.28}$$

где $q_{цо} = Q + \Delta Q = Q_{пр}$ — предельный курсовой угол цели.

А. Аналитическое решение.

Q рассчитывается по формуле (5.1.8) или по табл. 5.1.2, а ΔQ — по формуле (5.1.28). По формуле (5.1.27) определяется, находится ли маневрирующий внутри предельного курсового угла цели или вне его.

Если $q_{цо} < Q_{пр}$, сближение на $Д_з$ возможно.

Если $q_{цо} > Q_{пр}$, сближение на $Д_з$ невозможно.

Пример 5.1.9. Цель следует курсом 90°, $v_ц = 24$ уз, маневрирующий находится на курсовом угле цели $q_{цо} = 60°$ правого борта, в дистанции $Д_0 = 8$ миль, $v_м = 18$ уз. Необходимо определить возможность сокращения маневрирующим дистанции до цели до $Д_з = 4$ миль.

Решение. 1) По формуле (5.1.8) находим $Q = \arcsin \frac{18}{24} = \arcsin 0{,}75 = 48°$.

2) По формуле (5.1.28) находим $\Delta Q = \arcsin \frac{4}{8} = \arcsin 0{,}5 = 30°$.

3) Так как $60° < 48° + 30°$ (формула 5.1.27), то сближение на заданное расстояние возможно.

Б. Графическое решение показано на рис. 5.1.8.

5.2. МАНЕВРИРОВАНИЕ ДЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ И УДЕРЖАНИЯ ПОЗИЦИИ

5.2.1. Изменение позиции в кратчайший срок (общий случай)

Существо задачи (рис. 5.2.1) заключается в следующем. Известны взаимное положение маневрирующего и цели в начальный момент времени, а также курс и скорость цели. Необходимо найти такой курс маневрирующего, чтобы он, идя этим курсом с заданной скоростью, оказался по дистанции и курсовому углу (пеленгу) в новой позиции относительно цели. Необходимо найти также время маневра.

А. Аналитическое решение.

$$K_м = K_ц + \xi, \tag{5.2.1}$$

где ξ — угол отворота маневрирующего от курса цели;

$$\xi = \arcsin\left[\frac{\sin(q_{цо} + \gamma)}{m}\right] - q_{цо} - \gamma, \tag{5.2.2}$$

где γ — вспомогательный угол;

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\mu \sin\theta}{1-\mu\cos\theta}. \qquad (5.2.3)$$

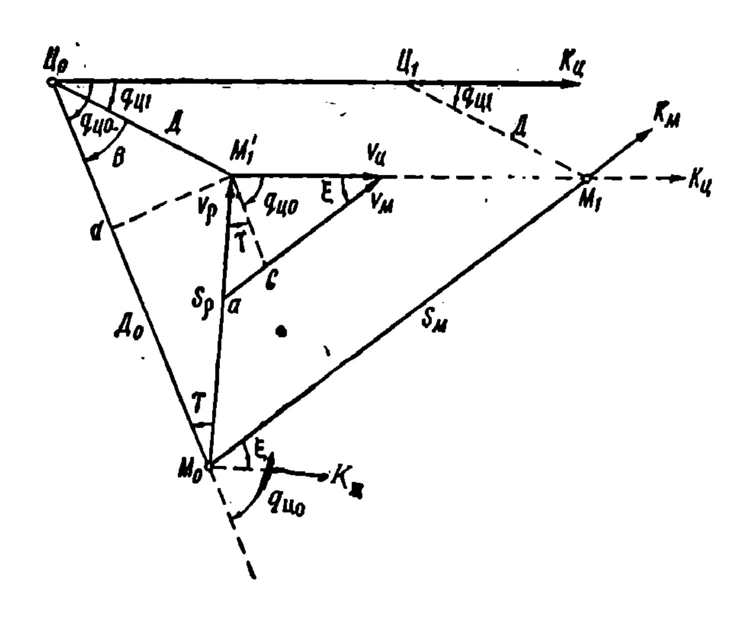


Рис. 5.2.1

где θ — величина изменения курсового угла цели (пеленга на цель) при перемене позиции;

$$\theta = q_{ц1} - q_{ц0}. \qquad (5.2.4)$$

Значения угла $180° - \gamma$, округленные до одного градуса, в зависимости от μ и θ даны в табл. 5.2.1.

Значение arcsin в формуле (5.2.2) может быть получено по аргументам $q_{ц0}+\gamma$ и m из табл. 5.1.1.

Таблица 5.2.1

Значения вспомогательного угла 180° — γ

θ	μ									
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
10	179°	177°	176°	173°	170°	166°	159°	147°	126°	95°
20	178	175	172	168	162	155	145	132	117	100
30	177	173	169	163	156	148	138	128	116	105
40	176	171	166	160	153	144	136	127	118	110
50	175	170	164	158	150	143	136	129	121	115
60	175	169	163	157	150	144	137	131	126	120
70	174	168	162	157	150	144	139	134	130	125
80	174	168	163	157	152	147	142	138	134	130
90	174	169	164	158	154	149	145	142	139	135
100	174	169	164	160	156	152	149	146	143	140
110	174	169	164	162	159	155	153	150	148	145
120	175	171	168	165	162	159	156	154	152	150
130	176	172	169	167	165	162	160	159	157	155
140	177	174	171	170	168	166	164	163	162	160
150	177	175	173	172	170	169	168	167	166	165
160	178	177	176	175	174	173	172	171	171	170
170	179	178	178	177	177	176	176	176	175	175

Продолжение

θ	μ									
	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
10	66°	49°	39°	32°	28°	26°	24°	22°	21°	20°
20	85	73	64	58	52	48	45	42	40	38
30	95	87	80	74	69	65	62	58	56	54
40	103	96	90	86	82	78	75	72	70	68
50	109	104	100	96	92	89	87	84	82	80
60	115	111	108	104	101	98	96	94	92	90
70	121	118	115	112	110	107	105	103	101	100
80	127	124	121	119	117	115	114	112	110	108
90	133	130	128	126	125	123	121	119	118	117
100	138	136	134	132	131	129	128	127	126	124
110	143	142	140	139	137	136	135	134	133	132
120	148	147	146	145	144	144	142	141	140	139
130	154	153	152	151	150	149	149	148	147	147
140	159	158	157	157	156	155	155	154	153	153
150	164	163	163	162	162	161	161	161	160	160
160	169	169	169	168	168	167	167	167	167	167
170	175	175	174	174	174	174	174	173	173	173

Знак ξ одинаков со знаком суммы углов $q_{ц0}+\gamma$.

$$t^{1}=\frac{S_{\rho}}{v_{\rho}}; \qquad (5.2.5)$$

$$S_{\rho}=Д_{0}\sqrt{1+\mu^{2}-2\mu\cos\theta}; \qquad (5.2.6)$$

$$v_{\rho}=v_{ц}\sqrt{1+m^{2}-2m\cos\xi}. \qquad (5.2.7)$$

Значения S_{ρ} и v_{ρ} находятся из табл. 5.2.2 по аргументам μ или m и углам θ или ξ соответственно.

Пример 5.2.1. Маневрирующий в начале маневра находится на курсовом угле цели $q_{ц0}=70^\circ$ правого борта в расстоянии $Д_{0}=100$ миль. $v_{ц}=30$ уз, $K_{ц}=90^\circ$. Необходимо рассчитать курс маневрирующего при $v_{м}=60$ уз, приводящий его в кратчайший срок в позицию на $q_{ц1}=30^\circ$ правого борта в $Д_{1}=75$ миль, а также время маневра.

Решение. 1) Из табл. 5.2.1 по $\mu=\frac{75}{100}=0{,}75$ и $\theta=30-70=-40^\circ$ получаем $180-\gamma=131^\circ$. Следовательно, $\gamma=49^\circ$.

2) Из табл. 5.1.1 по $q_{ц0}+\gamma=70+49=119^\circ$ и $v_{ц}/v_{м}=30/60=0{,}5$ получаем

$$\arcsin\left[\frac{\sin(q_{ц0}+\gamma)}{m}\right]=26^\circ.$$

Следовательно, $\xi=180-(26+49+70)=35^\circ$.

3) Из табл. 5.2.2 по $\mu=0{,}75$ и $\theta=40^\circ$ находим 0,64. Следовательно, $S_{\rho}=100\cdot0{,}64=64$ мили.

4) Из табл. 5.2.2 по $m=\frac{60}{30}=2$ и $\xi=35^\circ$ находим 1,32. Следовательно, $v_{\rho}=30\cdot1{,}32=39{,}6$ уз.

5) По формуле (5.2.5) находим

$$t=\frac{64}{39{,}6}=1{,}62 \text{ ч.}$$

Б. Графическое решение (рис. 5.2.2):

— наносятся начальные места маневрирующего и цели; проводится линия начального пеленга $Ц_{0}М_{0}$;

— по заданному курсовому углу $q_{ц1}$ (пеленгу $П_{1}$) и расстоянию $Д_{1}$ от начального места цели наносится новая относительная позиция маневрирующего M_{1}';

Таблица 5.2.2

Относительное перемещение S_ρ и относительная скорость v_ρ, приходящиеся на единицу изменения пути или скорости

θ или ξ	μ или m								
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0	0,60	0,40	0,20	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
30	0,68	0,57	0,50	0,52	0,60	0,73	0,89	1,06	1,24
60	0,87	0,87	0,90	1,00	1,11	1,25	1,40	1,56	1,73
90	1,08	1,17	1,28	1,41	1,56	1,72	1,89	2,06	2,24
120	1,25	1,40	1,56	1,73	1,91	2,09	2,27	2,46	2,65
150	1,36	1,55	1,74	1,93	2,13	2,32	2,52	2,71	2,91
180	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00

— решается задача сближения с точкой M_1' вплотную (точка движется курсом и скоростью цели), находится место маневрирующего в конце маневра (точка M_1);

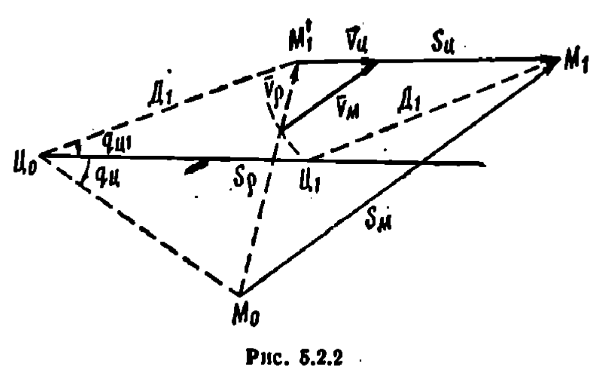


Рис. 5.2.2

— из точки M_1 проводится прямая, параллельная линии заданного пеленга, — находится место цели $Ц_1$ в конце маневра;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.2.2. Выход маневрирующего на заданную позицию

Существо задачи (рис. 5.2.3) заключается в следующем. В начальный момент маневрирующий и цель, курс и скорость которой известны, находятся в одной точке. Необхо-

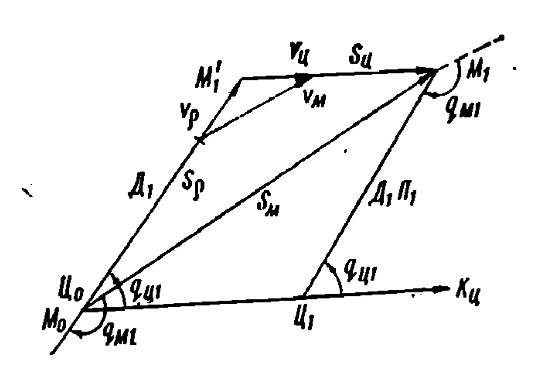


Рис. 5.2.3

димо найти такой курс маневрирующего, чтобы он, идя этим курсом с заданной скоростью, в кратчайший срок оказался в заданной по дистанции и курсовому углу (пеленгу) позиции относительно цели. Необходимо найти также время маневра.

Данная задача обратна задаче сближения вплотную.

А. Аналитическое решение.

$$K_м = П_{M_1' Ц_0} - q_{м1}; \qquad (5.2.8)$$

$$q_{м1} = 180° - \arcsin\left(\frac{\sin q_{ц1}}{m}\right). \qquad (5.2.9)$$

Величина $\arcsin\left(\frac{\sin q_{ц1}}{m}\right)$ может быть получена из табл. 5.1.1 по аргументам $q_ц$ и m.

$$t = \frac{Д_1}{\pm v_ц \cos q_{ц1} - v_м \cos q_{м1}}. \qquad (5.2.10)$$

Пример 5.2.2. Маневрирующий и цель вначале находятся в одной точке. $v_ц = 30$ уз, $K_ц = 90°$. Необходимо рассчитать курс маневрирующего при $v_м = 60$ уз, приводящий его в кратчайший срок в позицию на $q_{ц1} = 50°$ левого борта в $Д_1 = 75$ миль, а также время маневра.

Решение. Из табл. 5.1.1 по $q_{ц1} = 50°$ и $v_ц/v_м = 30/60 = 0{,}5$ получаем $\arcsin(\sin q_{ц1}/m) = 22°$.

Следовательно, $q_{м1} = 180 - 22 = 158°$ правого борта (борт маневрирующего противоположен борту цели). $K_м = 220 - 158 = 62°$,

$$t = \frac{75}{-30\cos 50° - 60\cos 158°} = \frac{75}{-30 \cdot 0{,}643 + 60 \cdot 0{,}927} = \frac{75}{-19{,}3 + 55{,}6} = 2{,}1 \text{ ч.}$$

Б. Графическое решение (рис. 5.2.3):

— наносится заданная относительная позиция маневрирующего M_1' по начальному пеленгу и расстоянию от цели;

— решается задача сближения вплотную с точкой M_1' (точка движется тем же курсом и скоростью, что и цель);

— из точки M_1 проводится линия, параллельная линии заданного пеленга; при этом находится место цели в момент конца маневра;

— время маневра находится как $S_м : v_м$ или $S_ц : v_ц$.

5.2.3. Изменение позиции при постоянстве пеленга (курсового угла) цели

Решение этой задачи рассмотрено в разделе 5.1 (изменение дистанции при постоянстве пеленга). См. рис. 5.1.4, табл. 5.1.1, а также номограмму (рис. 5.1.5).

5.2.4. Изменение позиции при постоянстве дистанции до цели

Существо задачи (рис. 5.2.4) заключается в том, что маневрирующий изменяет позицию по пеленгу (курсовому углу) цели, не меняя дистанции до нее.

А. Аналитическое решение.

Величина $K_м$ рассчитывается по формуле (5.2.1).

$$\xi = \rho_к = -\arcsin\left(\frac{\sin \rho_к}{m}\right); \qquad (5.2.11)$$

$$\rho_к = 90^\circ + q_{ц.\,ср}; \qquad (5.2.12)$$

$$q_{ц.\,ср} = \frac{q_{ц0} + q_{ц1}}{2}. \qquad (5.2.13)$$

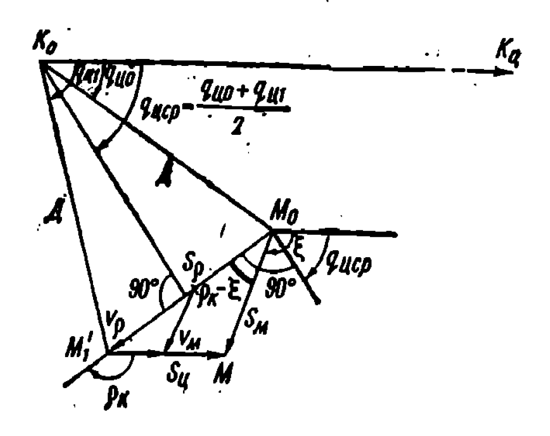


Рис. 5.2.4

Величина t рассчитывается по формуле (5.2.5).

$$S_р = 2Д \sin\frac{\theta}{2}. \qquad (5.2.14)$$

θ рассчитывается по формуле (5.2.4).

$v_р$ рассчитывается по формуле (5.2.7) или выбирается из табл. 5.2.2.

Пример 5.2.3. Маневрирующий в начале маневра находится на курсовом угле цели $q_{ц0} = 30^\circ$ правого борта в расстоянии $Д = 75$ миль. $v_ц = 15$ уз, $K_ц = 90^\circ$. Необходимо рассчитать курс маневрирующего при $v_м = 30$ уз, приводящий его в кратчайший срок в позицию на $q_{ц1} = 60^\circ$ правого борта без изменения дистанции, а также время маневра.

Решение. 1) По формуле (5.2.13) находим $q_{\text{ц. ср}} = \frac{30+60}{2} = 45°$ правого борта.

2) По формуле (5.2.12) находим $\rho_К = 90 + 45 = 135°$.

3) По формуле (5.2.11)

$$\xi = 135 - \arcsin\left(\frac{\sin 135°}{2}\right) = 135 - \arcsin\left(\frac{0,7071}{2}\right) = 135 - 20,6 = 114,4°.$$

4) По формуле (5.2.1) находим $К_М = 90 + 114,4 = 204,4°$.

5) По формуле (5.2.4) находим $\theta = 60 - 30 = 30°$.

6) По формуле (5.2.14) находим $S_\rho = 2 \cdot 75 \sin\frac{30°}{2} = 150 \cdot 0,2588 = 39$ миль.

7) Из табл. 5.2.2 по $m = \frac{30}{15} = 2,0$ и $\xi = 114,4°$ находим $v_\rho = 15 \cdot 2,6 = 39$ уз.

8) По формуле (5.2.5) находим $t = \frac{39}{39} = 1$ ч.

Б. Графическое решение аналогично одному из случаев изменения позиции и показано на рис. 5.2.4.

5.2.5. Удержание (сохранение) позиции относительно цели

Сущность задачи (рис. 5.2.5) заключается в следующем. Маневрирующий находится в позиции относительно цели, определяемой пеленгом и дистанцией. Затем цель из-

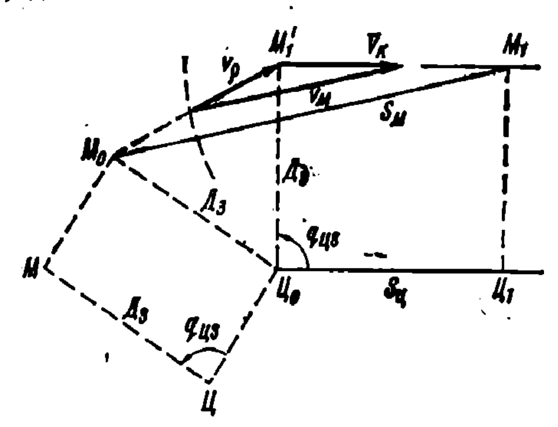


Рис. 5.2.5

меняет курс. Необходимо найти, на какой курс должен лечь маневрирующий для сохранения позиции в кратчайший срок при заданной скорости движения. Необходимо также определить время маневра. Задача сводится к общему случаю маневрирования при перемене позиции. Новой позицией здесь будет относительная позиция маневрирующего на новом курсе цели.

А. Аналитическое решение аналогично общему случаю изменения позиции (см. раздел 5.2.1).

Б. Графическое решение подобно общему случаю изменения позиции (см. рис. 5.2.5).

5.2.6. Изменение позиции в заданный срок

Сущность задачи (рис. 5.2.6) заключается в том, что изменение позиции должно быть осуществлено не в кратчайший срок, как это имеет место в общем случае (раздел 5.2.1), а в заданное время. Искомыми при этом являются как курс маневрирующего для изменения позиции, так и требуемая для этого скорость.

А. Аналитическое решение. Величина $K_м$ рассчитывается по формуле (5.1.1).

$$x = \sqrt{Д_0^2 + S_ц^2 - 2Д_0 S_ц \cos q_{ц0}}; \qquad (5.2.15)$$

$$\gamma = \arcsin \frac{S_ц \sin q_{ц0}}{x}; \qquad (5.2.16)$$

$$S_м = \sqrt{x^2 + Д_1^2 - 2xД_1 \cos (q_{ц0} - q_{ц1} + \gamma)}; \qquad (5.2.17)$$

$$v_м = \frac{S_м}{t}; \qquad (5.2.18)$$

$$\delta = \arcsin \frac{Д \sin (q_{ц0} - q_{ц1} + \gamma)}{S_м}; \qquad (5.2.19)$$

$$q_{м0} = \gamma + \delta. \qquad (5.2.20)$$

Пример 5.2.4. Маневрирующий в начале маневра находится на курсовом угле цели $q_{ц0} = 70°$ левого борта в расстоянии $Д_0 = 60$ миль по пеленгу $П_{мц} = 170°$, $v_ц = 20$ уз. Необходимо рас-

считать курс и скорость маневрирующего, приводящие его в позицию на $q_{Ц1} = 30°$ левого борта в $Д_1 = 40$ миль за время $t = 2,5$ ч.

Решение. 1) Из формулы (5.2.18) имеем $S_Ц = 20 \cdot 2,5 = 50$ миль.

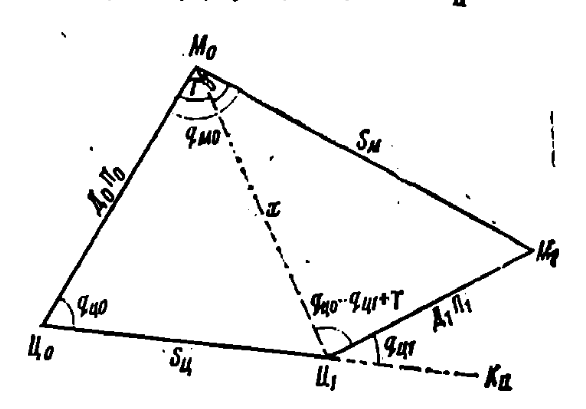


Рис. 5.2.6

2) По формуле (5.2.15)

$$x = \sqrt{60^2 + 50^2 - 2 \cdot 60 \cdot 50 \cos 70°} = \sqrt{3600 + 2500 - 6000 \cdot 0,342} =$$
$$= \sqrt{4050} = 63,6 \text{ миль.}$$

3) По формуле (5.2.16)

$$\gamma = \arcsin \frac{50 \sin 70°}{63,6} = \arcsin \frac{50 \cdot 0,94}{63,6} = \arcsin 0,739 = 47,5°.$$

4) По формуле (5.2.17)

$$S_М = \sqrt{63,6^2 + 40^2 - 2 \cdot 63,6 \cdot 40 \cos (70° - 30° + 47,5°)} =$$
$$= \sqrt{4050 + 1600 - 5090 \cdot 0,044} = \sqrt{5446} = 73,8 \text{ миль.}$$

5) Из формулы (5.2.18) имеем $v_М = 73,8/2,5 = 29,6$ уз.

6) По формуле (5.2.19)

$$\delta = \arcsin \frac{40 \cdot \sin 87,5°}{73,8} = \arcsin \frac{40 \cdot 0,99}{73,8} = \arcsin 0,536 = 32,3°.$$

7) Из формулы (5.2.20) имеем $q_М = 47,5 + 32,3 = 79,8°$.

8) Из формулы 5.1.1 имеем $К_М = 170 - 79,8 = 90,2°$.

Б. Графическое решение (рис. 5.2.6):

— наносятся места цели и маневрирующего в момент начала маневра (точки $Ц_0$ и $М_0$);

— от точки $Ц_0$ по линии курса цели откладывается расстояние, которое эта цель пройдет за заданное время маневра; получается точка $Ц_1$;

— от точки $Ц_1$ по заданному направлению, соответствующему $q_{ц1}$, в дистанции $Д_1$ наносится точка $М_1$;

— точки $М_0$ и $М_1$ соединяются прямой линией, которая является линией курса маневрирующего;

— скорость маневрирующего находится как $S_м : t$.

5.2.7. Пересечение курса цели впереди нее в максимально возможном расстоянии

Существо задачи (рис. 5.2.7) заключается в том, что маневрирующий пересекает курс цели впереди в максимальном от нее удалении. Задача имеет смысл при $v_м < v_ц$

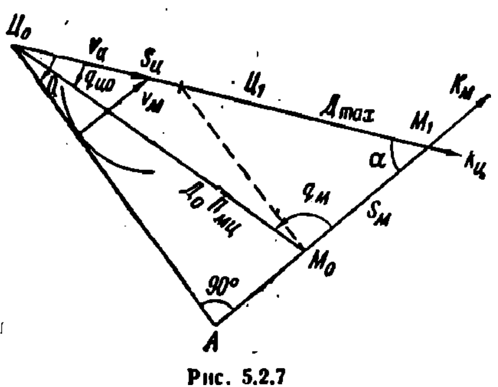


Рис. 5.2.7

и $q_ц < Q$. Необходимо найти курс маневрирующего, время маневра, а также величину максимального расстояния $Д_{max}$.

А. Аналитическое решение.

Величина Q рассчитывается по формуле (5.1.8) или по табл. 5.1.2.

$$\xi = 90° - Q. \quad (5.2.21)$$

знак ξ обратен знаку $q_{цо}$.

Величина $К_м$ рассчитывается по формуле (5.2.1).

$$Д_{max} = Д_0 \frac{\sin(Q - q_{цо})}{\sin Q}. \quad (5.2.22)$$

Величина t рассчитывается по формулам (5.2.5); (5.2.6); (5.2.7) или с помощью табл. 5.2.2.

Пример 5.2.5. Маневрирующий в начале маневра находился на курсовом угле цели $q_{ц0} = 30°$ правого борта в расстоянии $Д_0 = 60$ миль; $К_ц = 70°$, $v_ц = 24$ уз. Скорость маневрирующего $v_м = 18$ уз. Необходимо рассчитать курс маневрирующего, время маневра и величину $Д_{max}$.

Решение. 1) По формуле (5.1.8)

$$Q = \arcsin \frac{18}{24} = 48{,}5°.$$

2) Из формулы (5.2.21) имеем $\xi = 90 - 48{,}5 = 41{,}5°$.

3) Из формулы (5.2.1) имеем $К_м = 70 - 41{,}5 = 28{,}5°$.

4) Из формулы (5.2.22)

$$Д_{max} = 60 \frac{\sin(48{,}5° - 30°)}{\sin 48{,}5°} = 60 \frac{0{,}318}{0{,}75} = 25{,}4 \text{ мили}.$$

5) Из табл. 5.2.2 по $\rho = 25{,}4/60 = 0{,}424$ и $\theta = 30 - 0 \angle 30°$ находим 0,66. Следовательно, $S_\rho = 60 \cdot 0{,}66 = 39{,}6$ мили.

6) Из табл. 5.2.2 по $m = 18/24 = 0{,}75$ и $\xi = 41{,}5°$ находим 0,66. Следовательно, $v_\rho = 24 \cdot 0{,}66 = 15{,}8$ уз.

7) Из формулы (5.2.5) имеем $t = 39{,}6/15{,}8 = 2{,}5$ ч.

Б. Графическое решение (рис. 5.2.8):

— при начальном месте цели $Ц_0$ выполняется построение критического курсового угла, для чего от точки $Ц_0$ откладывается $\bar{v}_ц$, из его конца описывается окружность радиусом $v_м$, к которой проводится касательная, ближайшая к точке $М_0$;

— из точки $М_0$ перпендикулярно к этой касательной проводится линия курса маневрирующего; в точке ее пересечения с линией курса цели (точка $М_1$) получаем место цели в момент прихода на $Д_{max}$;

— измеряется расстояние $S_м = М_0М_1$ и рассчитывается время маневра $S_м : v_м$;

— от точки $Ц_0$ по курсу цели откладывается $S_ц = v_ц t$, получается точка $Ц_1$ — место цели в момент конца маневра;
— снимается расстояние $Д_{max} = M_1 Ц_1$.

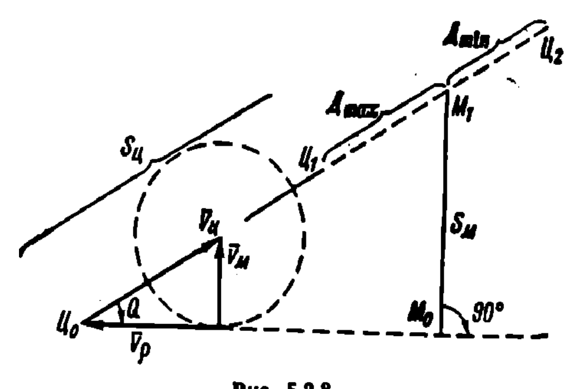


Рис. 5.2.8

5.2.8. Пересечение курса цели позади нее в минимально возможном расстоянии

Существо задачи (рис. 5.2.9) заключается в том, что маневрирующий пересекает курс цели позади в минималь-

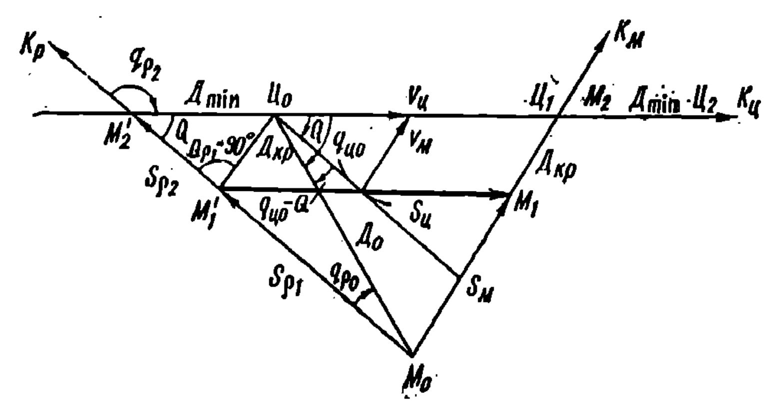


Рис. 5.2.9

ном от нее удалении. Задача имеет смысл при $v_м < v_ц$ и $q_ц > Q$. Необходимо найти курс маневрирующего, время маневра, а также величину минимального расстояния $Д_{min}$.

А. Аналитическое решение.

Величина Q рассчитывается по формуле (5.1.8) или по табл. 5.1.2. Величина ξ рассчитывается по формуле (5.2.21), знак ξ обратен знаку $q_{ц0}$. Курс маневрирующего $K_м$ рассчитывается по формуле (5.2.1).

$$Д_{min} = Д_0 \frac{\sin(q_{ц0} - Q)}{\sin Q}. \qquad (5.2.23)$$

Величина t рассчитывается по формулам (5.2.5); (5.2.6); (5.2.7) или с помощью табл. 5.2.2.

Пример 5.2.6. Маневрирующий в начале маневра находился на курсовом угле цели $q_{ц0} = 45°$ правого борта в расстоянии $Д_0 = 60$ миль; $K_ц = 90°$, $v_ц = 24$ уз. Скорость маневрирующего $v_м = 12$ уз. Необходимо рассчитать курс маневрирующего, время маневра и величину $Д_{min}$.

Решение. 1) Из формулы (5.1.8) имеем $Q = \arcsin \frac{12}{24} = 30°$.

2) Из формулы (5.2.21) имеем $\xi = 90 - 30 = 60°$.

3) Из формулы (5.2.1) имеем $K_м = 90 - 60 = 30°$.

4) По формуле (5.2.23)

$$Д_{min} = 60 \frac{\sin(45° - 30°)}{\sin 30°} = 60 \frac{0,259}{0,5} = 31 \text{ миля}.$$

5) Из табл. 5.2.2 по $\mu = 31/60 = 0,52$ и $\theta = 180 - 45 = 135°$ находим 1,42.
Следовательно, $S_р = 60 \cdot 1,42 = 85$ миль.

6) Из табл. 5.2.2 по $m = \frac{12}{24} = 0,5$ и $\xi = 60°$ находим 0,87. Следовательно, $v_р = 24 \cdot 0,87 = 20,8$ уз.

7) Из формулы (5.2.5) имеем $t = \frac{85}{20,8} = 4,1$ ч.

Б. Графическое решение (рис. 5.2.8) аналогично решению при пересечении курса цели впереди. В момент прихода на минимальное расстояние маневрирующий находится в точке $М_1$, а цель в точке $Ц_2$.

5.2.9. Возможность изменения позиции

При $v_м > v_ц$ может быть занята (изменена, сохранена) любая позиция маневрирующего относительно цели. При $v_м = v_ц$ может быть сохранена также любая позиция. При

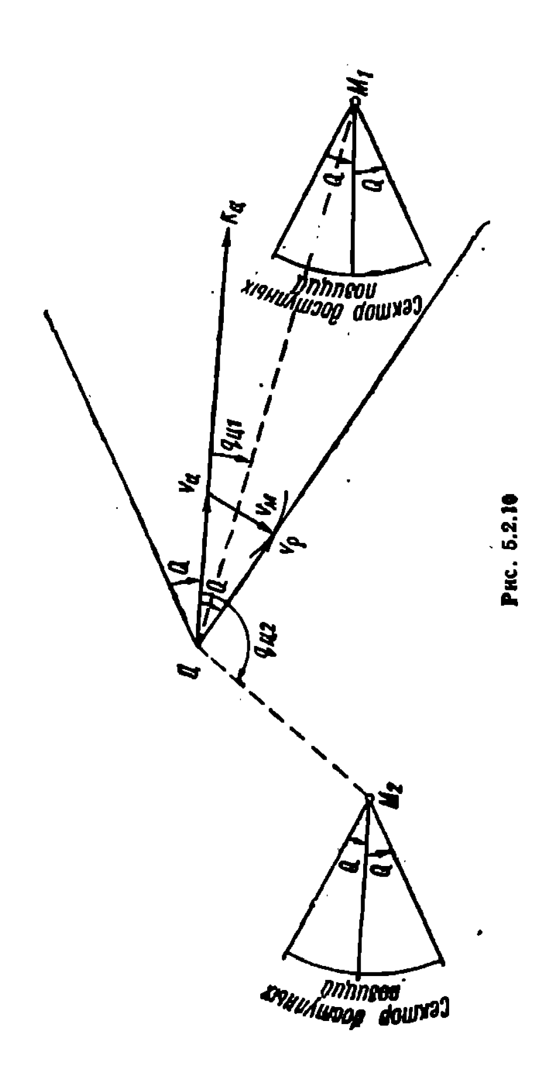

M1
M2
Ka
Va
Vм
Vp
qц1
qц2
Q
Ц
Сектор доступных позиций
Сектор доступных позиций

Рис. 5.2.10

$v_м < v_ц$ возможности изменения позиции характеризуются сектором доступных позиций (рис. 5.2.10). Этот сектор величиной в $2Q$ строится при начальной позиции маневрирующего симметрично направлению, обратному курсу цели. Позиции, находящиеся внутри сектора, могут быть заняты маневрирующим, позиции вне сектора оказываются для него недоступными. Так, например, для маневрирующего M_1, находящегося внутри критического курсового угла, построенного при цели ($q_{ц1} < Q$), возможно изменение позиций вплоть до сближения вплотную и пересечение курса цели впереди в максимально возможном расстоянии. Для маневрирующего M_2, находящегося вне критического курсового угла цели, возможно лишь изменение позиций при сближении с целью до кратчайшего расстояния и пересечение ее курса сзади в минимально возможном расстоянии.

Графоаналитическое решение (рис. 5.2.10). По формуле (5.1.8) рассчитывается Q. Исходя из известного курса цели находится сектор доступных позиций.

Наносятся положения цели и маневрирующего, а также заданная новая позиция. Если новая позиция оказывается внутри сектора, она доступна, вне сектора — недоступна.

Пример 5.2.7. Цель движется курсом $K_ц = 90°$ со скоростью $v_ц = 24$ уз. Маневрирующий находится на курсовом угле цели $q_ц = 15°$ правого борта в дистанции $Д_0 = 80$ миль.

Необходимо определить возможность маневрирующего занять позицию на $q_{ц1} = 45°$ в $Д_1 = 40$ миль. Скорость маневрирующего $v_м = 12$ уз.

Решение. По формуле (5.1.8)

$$Q = \arcsin \frac{12}{24} = 30°.$$

Наносится положение цели, маневрирующего и заданной позиции. В построении видно, что заданная позиция доступна.

5.3. МАНЕВРИРОВАНИЕ ДЛЯ УКЛОНЕНИЯ

5.3.1. Уклонение от сближения на заданное расстояние с тихоходной целью

Задача имеет смысл в том случае, когда маневрирующий обладает преимуществом в скорости по сравнению с целью.

А. Аналитическое решение (рис. 5.3.1).

$$К_{м.\,пр} = П_{мц} \pm Q_{пр},\qquad (5.3.1)$$

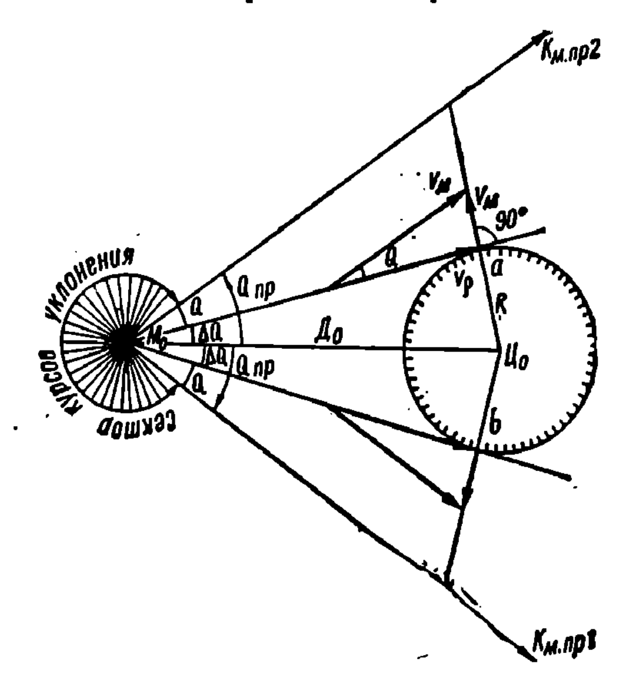


Рис. 5.3.1

где $К_{м.\,пр}$ — предельные курсы маневрирующего;

$Q_{пр}$ — предельный курсовой угол маневрирующего;

$$Q_{пр} = Q + \Delta Q;\qquad (5.3.2)$$

$$Q = \arcsin \frac{v_ц}{v_м};\qquad (5.3.3)$$

$$\Delta Q = \arcsin \frac{R}{Д_0};\qquad (5.3.4)$$

$$R = Д_э + f_{о.\,ц} + v_ц t_з.\qquad (5.3.5)$$

где $f_{о.п}$ — предельная ошибка относительной позиции маневрирующего;
$t_з$ — время запаздывания маневра;

$$f_{о.п} = 3\sqrt{\Delta_м^2 + \Delta_ц^2}, \qquad (5.3.6)$$

где $\Delta_м^2$ — средняя квадратическая ошибка места маневрирующего;
$\Delta_ц^2$ — средняя квадратическая ошибка места цели;

$$t_з = T_{об} - T_{ук}, \qquad (5.3.7)$$

где $T_{об}$ — момент обнаружения цели;
$T_{ук}$ — момент начала маневра уклонения.

Пример 5.3.1. Цель находится от маневрирующего по пеленгу $П_{мц} = 90°$ в расстоянии $Д_0 = 100$ каб, $v_м = 30$ уз, $v_ц = 15$ уз. Необходимо найти сектор курсов уклонения от сближения с целью на $Д_з < 40$ каб при следующих условиях: $t_з = 5$ мин, $\Delta_м = 3$ каб, $\Delta_ц = 4$ каб.

Решение. 1) По формуле (5.3.6)

$$f_{о.п} = 3\sqrt{3^2 + 4^2} = 15 \text{ каб}.$$

2) Из формулы (5.3.5) имеем $R = 40 + 15 + 15 \cdot 0{,}83 = 67{,}5$ каб.

3) По формуле (5.3.4)

$$\Delta Q = \arcsin\frac{67{,}5}{100} = 42{,}5°.$$

4) По формуле (5.3.3)

$$Q = \arcsin\frac{15}{30} = 30°.$$

5) Из формулы (5.3.2) имеем $Q_{пр} = 30 + 42{,}5 = 72{,}5°$.

6) По формуле (5.3.1) имеем $K_{м.пр1} = 90 + 72{,}5 = 162{,}5°$ и $K_{м.пр2} = 90 - 72{,}5 = 17{,}5°$.

Б. Графическое решение (рис. 5.3.1):

— из места цели $Ц_0$ в момент обнаружения проводится окружность радиусом R;

— из начального места маневрирующего $М_0$ к этой окружности проводятся касательные $М_0a$ и $М_0b$;

— при точках a и b строятся скоростные треугольники;
— из точки M_0 проводятся линии предельных курсов маневрирующего $K_{м.пр1}$ и $K_{м.пр2}$, параллельные векторам скорости маневрирующего, полученным в скоростных треугольниках.

5.3.2. Уклонение от сближения на заданное расстояние с быстроходной целью

Задача имеет смысл в том случае, если цель не обнаружила маневрирующего и идет постоянными курсом и скоростью.

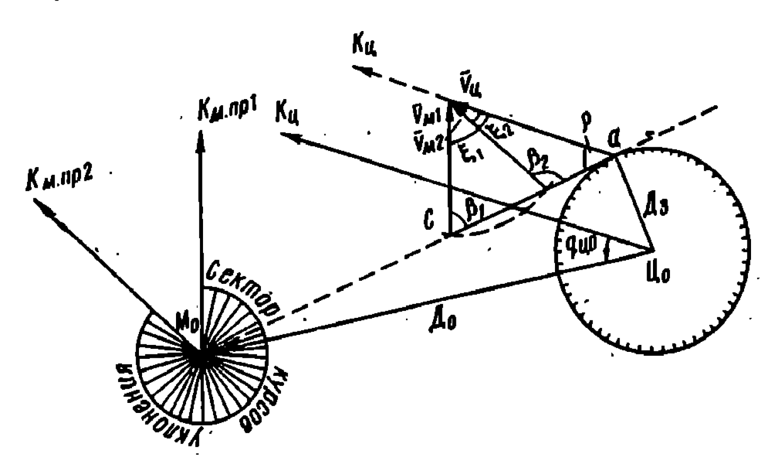


Рис. 5.3.2

А. Аналитическое решение (рис. 5.3.2).

$$\left.\begin{aligned} K_{м.\,пр1} &= K_ц + \xi_1 \\ K_{м.\,пр2} &= K_ц + \xi_2 \end{aligned}\right\}; \qquad (5.3.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 180 - (\rho + \beta_1) \\ \xi_2 &= 180 - (\rho + \beta_2) \end{aligned}\right\}; \qquad (5.3.9)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \arcsin\left(\frac{v_ц}{v_м}\sin\rho\right) \\ \beta_2 &= 180° - \beta_1 \end{aligned}\right\}; \qquad (5.3.10)$$

$$\rho = q_{ц0} + \Delta Q; \quad (5.3.11)$$

$$\Delta Q = \arcsin \frac{Д_з}{Д_0}. \quad (5.3.12)$$

Пример 5.3.2. Цель находится от маневрирующего по пеленгу $П_{мц} = 90°$ в расстоянии $Д_0 = 60$ миль. $v_м = 12$ уз, $v_ц = 15$ уз, $q_{ц0} = 20°$ левого борта, $К_ц = 290°$. Необходимо найти сектор курсов уклонения от сближения с целью на $Д_з < 30$ миль.

Решение. 1) Из формулы (5.3.12) находим $\Delta Q = \arcsin \frac{30}{60} = 30°$.

2) Из формулы (5.3.11) находим $\rho = 20 + 30 = 50°$.

3) По формулам (5.3.10)

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{15}{12}\sin 50°\right) = \arcsin(1{,}25 \cdot 0{,}77) = 73°;$$

$$\beta_2 = 180 - 73 = 107°.$$

4) Из формулы (5.3.9) находим $\xi_1 = 180 - (50 + 73) = 57°$ и $\xi_2 = 180 - (50 + 107) = 23°$.

5) Из формулы (5.3.8) находим $К_{м.пр1} = 290 + 57 = 347°$ и $К_{м.пр2} = 290 + 23 = 313°$.

Б. Графическое решение (рис. 5.3.2):

— из начального места цели $Ц_0$ проводится окружность радиусом $Д_з$;

— из начального места маневрирующего $М_0$ проводится касательная к этой окружности $М_0a$;

— из точки касания a прокладывается вектор скорости цели $\bar{v}_ц$; из его конца делается засечка на линии $М_0a$ радиусом $\bar{v}_м$; получаются векторы скоростей маневрирующего $\bar{v}_{м1}$ и $\bar{v}_{м2}$, соответствующие его предельным курсам уклонения;

— из точки $М_0$ проводятся предельные курсы маневрирующего $К_{м.пр1}$ и $К_{м.пр2}$, параллельные векторам скоростей.

5.3.3. Уклонение для расхождения с быстроходной целью в наибольшем возможном расстоянии

Задача имеет смысл в том случае, если цель не обнаружила маневрирующего и идет постоянными курсом и скоростью.

А. Аналитическое решение (рис. 5.3.3.).

$$K_м = K_ц - \xi; \qquad (5.3.13)$$

$$\xi = 90° - Q. \qquad (5.3.14)$$

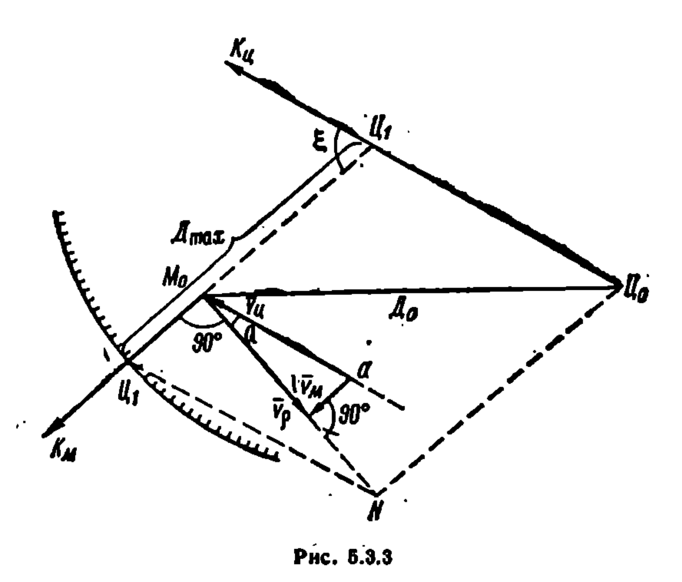


Рис. 5.3.3

где Q рассчитывается по формуле (5.1.8) или с помощью табл. 5.1.2.

Пример. 5.3.3. Цель находится от маневрирующего по пеленгу $П_{мц} = 90°$ в расстоянии $Д_0 = 100$ миль, $v_м = 15$ уз, $v_ц = 30$ уз, $K_ц = 300°$. Необходимо найти курс уклонения маневрирующего для расхождения его с целью в наибольшем возможном расстоянии.

Решение. 1) Из формулы (5.1.8) находим $Q = \arcsin\frac{15}{30} = 30°$.

2) Из формулы (5.3.14) находим $\xi = 90 - 30 = 60°$.

3) Из формулы (5.3.13) находим $K_м = 300 - 60 = 240°$.

Б. Графическое решение (рис. 5.3.3):

— при начальном месте маневрирующего строится критический курсовой угол;

— из начального места маневрирующего перпендикулярно внешней по отношению к цели стороне критического курсового угла проводится курс маневрирующего, ведущий его на расхождение в максимально возможном расстоянии с целью;

— положение маневрирующего и цели в момент прихода их на максимально возможное расстояние находится с помощью построения, показанного на рис. 5.3.3.

6. ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ПОРАЖЕНИЯ

6.1. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ

6.1.1. Вероятность попадания в заданный интервал

Вероятность попадания случайной величины X, подчиненной нормальному закону, в заданный интервал x_1—x_2 вычисляется по формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}\right)\right] \quad (6.1.1)$$

или

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{E}\right)\right], \quad (6.1.2)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt; \quad (6.1.3)$$

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\rho^2 t^2)\, dt; \quad (6.1.4)$$

σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

E — срединное (вероятное) отклонение случайной величины X;

$\bar{x}$ — математическое ожидание (центр рассеивания) случайной величины.

Связь между σ и E:

$$\sigma = \frac{E}{\rho\sqrt{2}} = 1{,}4826E \approx 1{,}5E;$$

$$E = \rho\sqrt{2}\sigma = 0{,}6745\sigma = \frac{2}{3}\sigma;$$

$\rho = 0{,}476936.$

Значения функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$ приведены в табл. III и V [1].

Следует иметь в виду, что в некоторых изданиях расчетные формулы для определения $P(x_1<X<x_2)$ имеют вид, отличающийся от (6.1.1) и (6.1.2). Это объясняется тем, что вместо функций (6.1.3) и (6.1.4) используются другие из возможных интегральных форм нормального распределения и соответствующие им таблицы. Поэтому необходимо быть внимательным как в выборе расчетной формулы, так и таблицы значений функции интегрального распределения, учитывая также и имеющиеся различия в применяемых обозначениях (например, взятые из таблиц III и V [1] величины необходимо удваивать).

Функции (6.1.3) и (6.1.4) нечетные, поэтому при отрицательном аргументе следует изменять знак функции, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Частные случаи. 1) Если $\bar{x}=0$, т. е. центр рассеивания совпадает с началом отсчета по оси x, тогда

$$P(x_1<X<x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2}{E}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{x_1}{E}\right)\right]. \quad (6.1.5)$$

2) Если $\bar{x}=0$ и заданный интервал относительно начала отсчета симметричен, т. е. $ox_1 = -l$, $ox_2=l$, тогда

$$P(x_1<X<x_2) = \Phi\left(\frac{|l|}{\sigma}\right) = \hat{\Phi}\left(\frac{|l|}{E}\right). \quad (6.1.6)$$

Пример 6.1.1. Курс корабля проложен в 3 км от берега. На удалениях от берега ближе 2570 м и далее 3530 м глубины, опасные для плавания (рис. 6.1.1). Какова вероятность того, что корабль, определяя свое место со среднеквадратической ошибкой

$E = 200$ м, не попадет на опасные для плавания глубины (окажется в заданном интервале $x_1 - x_2$)?

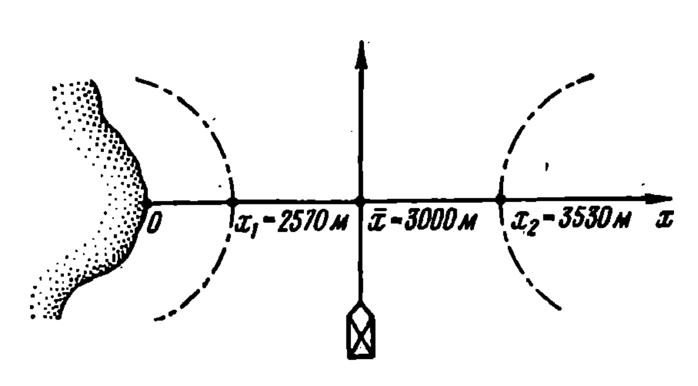


Рис. 6.1.1

Решение. Имеем $x_1 = 2570$ м, $x_2 = 3530$ м, $\bar{x} = 3000$ м. По формуле (6.1.1) и с помощью табл. III [1] находим

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3530 - 3000}{200}\right) - \Phi\left(\frac{2570 - 3000}{200}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi(2,650) + \Phi(2,150)] = \frac{1}{2}(0,9920 + 0,9684) =$$

$$= 0,9802 \approx 0,98.$$

Риск прохода корабля через опасные для плавания глубины составляет 2%.

Пример 6.1.2. В направлении объекта поиска противником выпущен аппарат, реагирующий на физическое поле объекта в интервале (полосе) $\pm$ 10 км. Срединная ошибка в удержании аппаратом заданного направления $E = 4$ км. Какова вероятность, что аппаратом будет обнаружен объект поиска?

Решение. Имеем $\bar{x} = 0$, $|l| = 10$ км. По формуле (6.1.6) и с помощью табл. V [1] находим

$$P = \hat{\Phi}\left(\frac{|l|}{E}\right) = \hat{\Phi}\left(\frac{10}{4}\right) = \hat{\Phi}(2,5) = 0,9082 \approx 0,91.$$

6.1.2. Вероятность попадания в плоскую область

Обозначения:

S — плоская область;

$N(x, y)$ — случайная точка, распределенная по нормальному закону;

$P(N \in S)$ — вероятность того, что случайная точка окажется внутри заданной области S на плоскости;

σ_x, σ_y — главные средние квадратические отклонения независимых случайных величин X, Y;

E_x, E_y — главные срединные отклонения независимых случайных величин X, Y;

$\sigma = \sigma_x = \sigma_y$ — радиальное среднее квадратическое отклонение;

$E = E_x = E_y$ — радиальное срединное отклонение.

Для характеристики кругового рассеивания кроме σ и E употребляется r_{50}, именуемое иногда «вероятным круговым отклонением». Следует иметь в виду различие названных параметров и не отождествлять E и r_{50}. В частности:

$$r_{50} = 1{,}177\sigma = 1{,}476E. \qquad (6.1.7)$$

Вероятность попадания в плоскую область, имеющую форму эллипса, подобного и расположенного подобно эллипсам равных вероятностей, определяется по формуле

$$P\{(X, Y) \in S\} = 1 - \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \qquad (6.1.8)$$

или

$$P\{(X, Y) \in S\} = 1 - \exp\left(-\rho^2 k_1^2\right), \qquad (6.1.9)$$

где

$$k = \frac{a}{\sigma_x} = \frac{b}{\sigma_y}; \quad k_1 = \frac{a}{E_x} = \frac{b}{E_y};$$

a и b — главные оси эллипса плоской фигуры.

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ (или $E_x = E_y = E$), область S является кругом радиусом R и центр рассеивания совпадает с центром круга, то

$$P\{(X, Y) \in S\} = 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right); \qquad (6.1.10)$$

$$P\{(X, Y) \in S\} = 1 - \exp\left(-\frac{\rho^2 R^2}{E^2}\right). \qquad (6.1.11)$$

Если рассеивание круговое и центр рассеивания отстоит от центра круга на расстоянии d, то вероятность попадания в круг S определяется по формуле

$$P\{(X, Y) \in S\} = \left[\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)\right] \int_0^r \left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right] I_0(ht)\, t\, dt, \quad (6.1.12)$$

где $h = \frac{d}{\sigma}$; $r = \frac{R}{\sigma}$;

I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка мнимого аргумента.

Круговое рассеивание, т. е. такое, при котором $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, на практике встречается редко. Для приближенных расчетов при $\sigma_x \neq \sigma_y$ площадь единичного эллипса рассеивания заменяется площадью равновеликого круга, а его радиус принимается за величину кругового рассеивания, т. е.

$$\sigma \approx \sqrt{\sigma_x \sigma_y}. \quad (6.1.13)$$

Такая замена допустима при $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} < 0{,}8 \div 1{,}2$ (относительная ошибка расчета не превышает ~ 3—5%).

Пример 6.1.3. Для постановки корабля на якорь подготовлена акватория S в виде круга радиусом $R = 2$ км. Корабль определяет свое место с точностью, характеризуемой единичным эллипсом рассеивания со среднеквадратическими ошибками $\sigma_x = 1{,}0$ км и $\sigma_y = 1{,}25$ км.

1. Какова вероятность того, что корабль станет на якорь в назначенной ему акватории S?

2. Какого радиуса должна быть акватория, чтобы место корабля оказалось в ее пределах с вероятностью 0,95?

Решение. Согласно (6.1.13)

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x \sigma_y} = \sqrt{1{,}25} = 1{,}12 \text{ км}.$$

1. Вероятность того, что место корабля окажется в пределах акватории S, будет

$$P\{(X, Y) \in S\} = 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{4}{2 \cdot 1{,}12^2}\right) =$$

$$= 1 - \exp(-1{,}60) = 0{,}80.$$

2. Чтобы место корабля оказалось с вероятностью 0,95 в пределах акватории S, решим уравнение (6.1.10) относительно R:

$$0{,}95 = 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2\cdot 1{,}12^2}\right);$$

$$\frac{R^2}{2\cdot 1{,}12^2} = 3{,}00;\ R = 2{,}74 \text{ км}.$$

Пример 6.1.4. Аппарат, имеющий зону действия (освещения, поражения и т. п.) радиусом $R=1500$ м, опускается на объект (цель) малого размера. Какова вероятность, что объект окажется в зоне действия аппарата, если рассеивание точек падения аппарата характеризуется радиальным срединным отклонением $E=800$ м?

Решение. Опишем круг с центром в месте объекта радиусом $R=1500$ м. Тогда объект окажется в зоне действия аппарата, если последний опустится в любой точке круга. Согласно формуле (6.1.11) получим

$$P\{(X,\ Y)\in S\} = 1 - \exp\left(-\frac{\rho^2 R^2}{E^2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{0{,}477^2\cdot 1500^2}{800^2}\right) =$$
$$= 1 - \exp(-0{,}80) = 0{,}55.$$

6.1.3. Вероятность попадания в прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания

В общем случае, когда центр рассеивания не совпадает с началом координат (рис. 6.1.2), вероятность попадания случайной точки в прямоугольник S со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, определяется равенством

$$P\{(X,\ Y)\in S\} = \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{y_2-\bar{y}}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-\bar{y}}{\sigma_y}\right)\right] \quad (6.1.14)$$

или

$$P\{(X,\ Y)\in S\} = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2-\bar{x}}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1-\bar{x}}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{y_2-\bar{y}}{E_y}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{y_1-\bar{y}}{E_y}\right)\right], \quad (6.1.15)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 — координаты точек пересечения соответствующих сторон прямоугольника (или их продолжений) с осями координат, причем $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$.

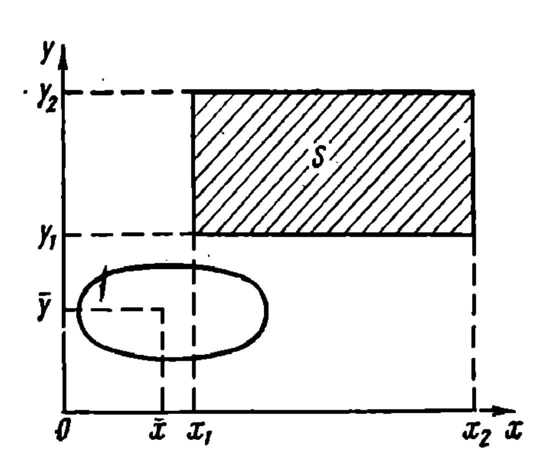


Рис. 6.1.2

Если центр рассеивания совпадает с началом координат ($\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$), тогда

$$P\{(X, Y) \in S\} = \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{x_2}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{y_2}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_1}{\sigma_y}\right)\right] \quad (6.1.16)$$

или

$$P\{(X, Y) \in S\} = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{y_2}{E_y}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{y_1}{E_y}\right)\right]. \quad (6.1.17)$$

Если центр рассеивания совпадает с началом координат и центром цели ($\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$, $|x_2|=|x_1|=|a|$, $|y_2|=|y_1|=|b|$), тогда:

$$P\{(X, Y)\in S\}=\Phi\left(\frac{|a|}{\sigma_x}\right)\Phi\left(\frac{|b|}{\sigma_y}\right); \qquad (6.1.18)$$

$$P\{(X, Y)\in S\}=\hat{\Phi}\left(\frac{|a|}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{|b|}{E_y}\right). \qquad (6.1.19)$$

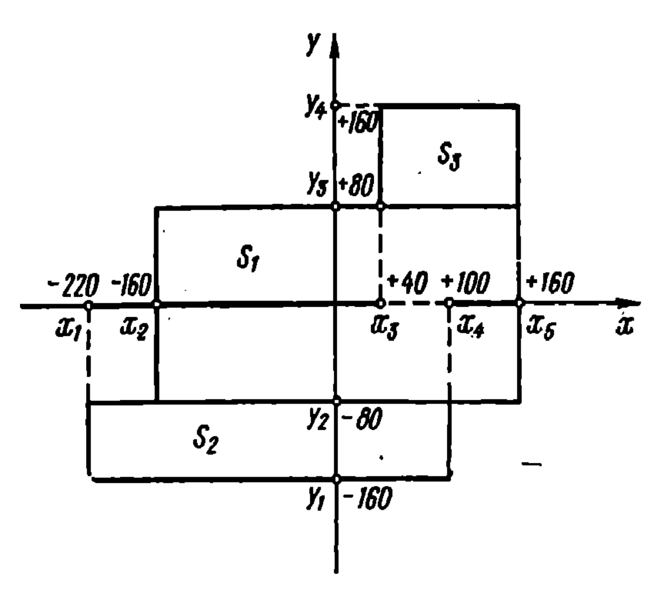


Рис. 6.1.3

Если стороны прямоугольника непараллельны координатным осям, то формулы (6.1.14)—(6.1.19) неприменимы. Только при круговом рассеивании ($\sigma_x=\sigma_y=\sigma$ или $E_x=E_y=E$) вероятность попадания в прямоугольник любой ориентации вычисляется по формулам (6.1.14)—(6.1.19). Формулы широко применяются при вычислении вероятностей попадания в цели: прямоугольные, приближенно аппроксимируемые прямоугольниками, составленные из прямоугольников.

Пример 6.1.5. Цель S — площадь сложной конфигурации, аппроксимирована тремя составляющими прямоугольниками S_1, S_2 и S_3, положение которых определяется координатами:

$$S_1\ (x_2 = -160\ \text{м},\ x_5 = +160\ \text{м},\ y_2 = -80\ \text{м};\ y_3 = +80\ \text{м});$$
$$S_2\ (x_1 = -220\ \text{м},\ x_4 = +100\ \text{м},\ y_1 = -160\ \text{м},\ y_2 = -80\ \text{м});$$
$$S_3\ (x_3 = +40\ \text{м},\ x_5 = +160\ \text{м},\ y_3 = +80\ \text{м},$$
$$y_4 = +160\ \text{м}),\ (\text{рис. } 6.1.3).$$

Точка прицеливания — центр прямоугольника S_1, систематическая ошибка отсутствует; срединные отклонения $E_x = 100$ м, $E_y =$ $= 60$ м. Найти вероятность попадания в цель S.

Решение. Вероятность попадания в цель S_1 определим, используя формулу (6.1.19) и табл. V [1] и приняв

$$|x_2| = |x_5| = |a| = 160\ \text{м},\ |y_2| = |y_3| = |b| = 80\ \text{м}:$$

$$P\{(X,\ Y)\in S_1\} = \hat{\Phi}\left(\frac{|a|}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{|b|}{E_y}\right) = \hat{\Phi}\left(\frac{160}{100}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{80}{60}\right) =$$
$$= \hat{\Phi}(1{,}60)\,\hat{\Phi}(1{,}33) = 0{,}720\cdot 0{,}630 = 0{,}454.$$

Вероятность попадания в цель S_2 определим, используя формулу (6.1.17):

$$P\{(X,\ Y)\in S_2\} = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_4}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{y_2}{E_y}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{y_1}{E_y}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{100}{100}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{-220}{100}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{-80}{60}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{-160}{60}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}(1{,}00) + \hat{\Phi}(2{,}20)\right]\left[-\hat{\Phi}(1{,}33) + \hat{\Phi}(2{,}67)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(0{,}500 + 0{,}862)(-0{,}630 + 0{,}928) = 0{,}102.$$

Аналогично вероятность попадания в цель S_3:

$$P\{(X,\ Y)\in S_3\} = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_5}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_3}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{y_4}{E_y}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{y_3}{E_y}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{160}{100}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{40}{100}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{160}{60}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{80}{60}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}(1{,}60) - \hat{\Phi}(0{,}40)\right]\left[\hat{\Phi}(2{,}67) - \hat{\Phi}(1{,}33)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(0{,}720 - 0{,}213)(0{,}928 - 0{,}630) = 0{,}038.$$

Вероятность попадания в цель S находится как сумма вероятностей попадания в составляющие площади S_1, S_2 и S_3:

$$P\{(X,\ Y)\in S\} = 0{,}454 + 0{,}102 + 0{,}038 = 0{,}594.$$

6.1.4. Вероятность попадания в двухмерную область малых размеров (приближенный метод)

Если размеры области S произвольной формы и ориентации не превосходят 0,5—0,7 средних квадратических отклонений (σ_x и σ_y) или 0,7—1 срединных отклонений (E_x

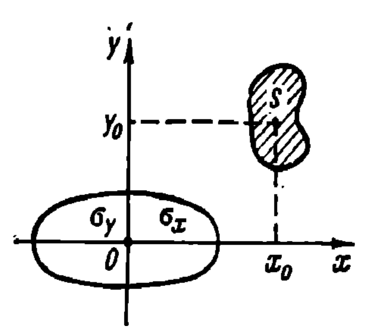


Рис. 6.1.4

и E_y) в соответствующих направлениях осей эллипса рассеивания, то вероятность попадания в нее приближенно определяется зависимостью

$$P\{(X, Y)\in S\} \approx \frac{S_0}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y_0^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (6.1.20)$$

или

$$P\{(X, Y)\in S\} \approx \frac{\rho^2 S_0}{\pi E_x E_y}\exp\left(-\frac{\rho^2 x_0^2}{E_x^2}-\frac{\rho^2 y_0^2}{E_y^2}\right), \quad (6.1.21)$$

где S_0 — площадь области S;

x_0, y_0 — координаты центра тяжести области S (центра цели) в системе координат единичного эллипса рассеивания (рис. 6.1.4).

В частности, если центр тяжести области S совпадает с центром рассеивания ($x_0=y_0=0$), то

$$P\{(X, Y)\in S\} \approx \frac{S_0}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \approx \frac{0{,}159\, S_0}{\sigma_x\sigma_y}; \quad (6.1.22)$$

$$P\{X, Y)\in S\} \approx \frac{\rho^2 S_0}{\pi E_x E_y} \approx \frac{0{,}0724\, S_0}{E_x E_y}. \quad (6.1.23)$$

Для применимости приближенных формул (6.1.20)—(6.1.23) недостаточно, чтобы площадь области S была мала по сравнению с площадью единичного эллипса рассеивания. Должны быть малы все размеры области S.

Точность результатов расчета больше при увеличении x_0 и y_0. Относительная погрешность не превышает 5—8%, если наибольшие размеры области не превышают 0,5 среднего квадратического отклонения в соответствующем направлении.

Область применения формул может быть расширена (в особенности при близости центра цели и центра рассеивания) до 1,5—2 средних квадратических отклонений, если истинные значения характеристик рассеивания заменить в формулах (6.1.20)—(6.1.23) так называемыми приведенными значениями, которые определяются равенствами:

$$\sigma'_x = \sqrt{\sigma_x^2 + 0{,}0833\, l_x^2}\,;\ \sigma'_y = \sqrt{\sigma_y^2 + 0{,}0833\, l_y^2}\,; \tag{6.1.24}$$

$$E'_x = \sqrt{E_x^2 + 0{,}0379\, l_x^2}\,;\ E'_y = \sqrt{E_y^2 + 0{,}0379\, l_y^2}\,, \tag{6.1.25}$$

где l_x и l_y — стороны прямоугольника, равновеликого области S.

Пример 6.1.6. Определить вероятность попадания в квадрат S со стороной $l = 80$ м, если центр рассеивания совмещен с центром квадрата, а $E_x = 120$ м и $E_y = 100$ м.

Решение. Используя формулу (6.1.23), получим

$$P\{(X, Y) \in S\} = \frac{0{,}0724\, S_0}{E_x E_y} = \frac{0{,}0724 \cdot 6400}{12000} = 0{,}0386.$$

Расчет, выполненный по точной формуле (6.1.19) при условии, что стороны квадрата параллельны осям эллипса рассеивания, дает результат 0,0378. Абсолютная ошибка составляет 0,0008, а относительная 2,1%.

6.1.5. Вероятность попадания в прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными главным осям рассеивания

Если область пространства V представлена в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными главным осям рассеивания, то вероятность попадания случайной точки (X, Y, Z) в эту область определяется по формуле

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} = \frac{1}{8}\left[\Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{y_2-\bar{y}}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{y_1-\bar{y}}{\sigma_y}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{z_2-\bar{z}}{\sigma_z}\right)-\Phi\left(\frac{z_1-\bar{z}}{\sigma_z}\right)\right] \qquad (6.1.26)$$

или

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} = \frac{1}{8}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2-\bar{x}}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{x_1-\bar{x}}{E_x}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\hat{\Phi}\left(\frac{y_2-\bar{y}}{E_y}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{y_1-\bar{y}}{E_y}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\hat{\Phi}\left(\frac{z_2-\bar{z}}{E_z}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{z_1-\bar{z}}{E_z}\right)\right], \qquad (6.1.27)$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ — абсциссы, ординаты и аппликаты граней прямоугольного параллелепипеда $(x_1<x_2,\ y_1<y_2,\ z_1<z_2)$;

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты центра рассеивания;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — средние квадратические отклонения в направлении осей Ox, Oy, Oz;

E_x, E_y, E_z — срединные отклонения в тех же координатах.

Если координаты центра рассеивания совмещены с центром параллелепипеда, то вероятность попадания будет равна

$$P\{X, Y, Z) \in V\} = \Phi\left(\frac{l_x}{\sigma_x}\right)\Phi\left(\frac{l_y}{\sigma_y}\right)\Phi\left(\frac{l_z}{\sigma_z}\right) \quad (6.1.28)$$

или

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} = \hat{\Phi}\left(\frac{l_x}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{l_y}{E_y}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{l_z}{E_z}\right), \quad (6.1.29)$$

где $l_x = \frac{x_2 - x_1}{2}$; $l_y = \frac{y_2 - y_1}{2}$; $l_z = \frac{z_2 - z_1}{2}$.

6.1.6. Вероятность попадания в цилиндрическую область с образующей, параллельной одной из главных осей рассеивания

Многие практические задачи удается решить, представляя область пространства V цилиндром. Если образующая цилиндрической .области V параллельна одной из главных

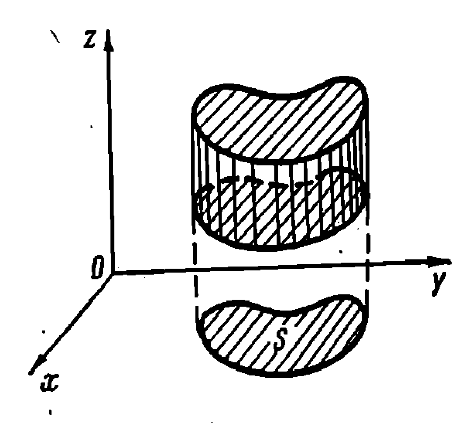


Рис. 6.1.5

осей рассеивания (например, Oz), а направляющая есть контур произвольной области S на плоскости xOy (рис. 6.1.5), то вероятность попадания есть произведение

двух событий — попадания точки (X, Y) в область S и попадания величины Z на участок $z_1 z_2$, равный длине образующей цилиндра. Таким образом:

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} = \\ = P\{(X, Y) \in S\} P(z_1 < Z < z_2). \qquad (6.1.30)$$

Вероятность $P\{(X, Y) \in S\}$ может быть вычислена любым из способов расчета вероятности попадания в плоскую область с помощью формул (6.1.8)—(6.1.25), а $P(z_1 < Z < z_2)$ — с помощью формул (6.1.1)—(6.1.6).

6.1.7. Вероятность попадания в трехмерную область малых размеров (приближенный метод)

Если размеры области V произвольной формы и ориентации не превосходят 0,5—0,7 средних квадратических отклонений (σ_x, σ_y, σ_z) или 0,7—1 срединных отклонений (E_x, E_y, E_z) в соответствующих направлениях осей эллипсоида рассеивания, то вероятность попадания в нее приближенно определяется зависимостью

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} \approx \frac{V_0}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_0}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{\sigma_z}\right)^2\right]\right\} \qquad (6.1.31)$$

или

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} \approx \frac{\rho^3 V_0}{\pi^{3/2} E_x E_y E_z} \times \\ \times \exp\left\{-\rho^2\left[\left(\frac{x_0}{E_x}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{E_y}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{E_z}\right)^2\right]\right\}, \qquad (6.1.32)$$

где V_0 — объем области V;

x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести области V (центра цели) в системе координат единичного эллипсоида рассеивания.

В частности, если центр тяжести области V совпадает с центром рассеивания ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), то

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} \approx \frac{V_0}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \approx \frac{0{,}0635\,V_0}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \quad (6.1.33)$$

или

$$P\{(X, Y, Z) \in V\} \approx \frac{\rho^3 V_0}{\pi^{3/2} E_x E_y E_z} \approx \frac{0{,}0195\,V_0}{E_x E_y E_z}. \quad (6.1.34)$$

6.2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СРЕДСТВ ПОРАЖЕНИЯ ПО ОДИНОЧНОЙ ЦЕЛИ

Одиночная цель — отдельный, относительно малоразмерный самостоятельно функционирующий объект (корабль, самолет, танк).

Если задачей стрельбы по одиночной цели является поражение ее, то показателем эффективности выполнения задачи W будет вероятность поражения цели $P(A)$:

$$W = P(A). \quad (6.2.1)$$

Понятие «поражение цели» является обобщающим термином и может иметь различный смысл. Например, при стрельбе по кораблю «поражение» может означать и потопление (гибель) его, и вывод из строя. Обычно заранее обусловливается, что понимается под поражением. Если этого не сделано, то результаты расчетов должны сопровождаться пояснением, какое из конкретных состояний цели (гибель, вывод из строя и т. п.) принято в качестве показателя эффективности.

Применение критерия (6.2.1) исходит из допущения, что цель может находиться в одном из двух возможных состояний — быть пораженной или сохранившей боеспособность (способной функционировать).

6.2.1. Закон поражения цели

Под законом поражения цели $G(m)$ понимается зависимость условной вероятности поражения цели при условии, что в нее попало ровно m снарядов.

Практически при оценке эффективности применения средств поражения применяется показательный закон:

$$G^*(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m, \qquad (6.2.2)$$

где m — количество попаданий снарядов в цель;
ω — среднее необходимое число попаданий для поражения цели.

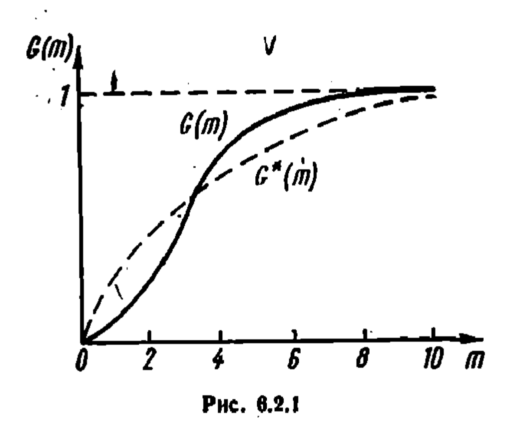


Рис. 6.2.1

Показательный закон поражения $G^*(m)$ является приближенным относительно действительного закона поражения $G(m)$ (рис. 6.2.1) и определяется из условия

$$G^*(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty}[1 - G(m)]}\right). \qquad (6.2.3)$$

Среднее необходимое число попаданий для поражения цели представляет сумму

$$\omega = \sum_{m=0}^{\infty}[1 - G(m)]. \qquad (6.2.4)$$

Для боеприпасов, обладающих избыточной мощностью разрушительного действия, закон поражения условно именуется единичным и выражается зависимостью

$$G(m) = \begin{cases} 0 \text{ при } m = 0; \\ 1 \text{ при } m \geqslant 1. \end{cases} \qquad (6.2.5)$$

6.2.2. Вероятность поражения цели

Общий случай. В общем случае вероятность поражения цели определяется зависимостью (формула А. Н. Колмогорова):

$$W(n) = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m}\, G(m), \qquad (6.2.6)$$

где $P_{n,m}$ — вероятность попадания в цель ровно m снарядов при n произведенных выстрелах.

При независимых выстрелах и неизменяющейся от выстрела к выстрелу вероятности попадания значение $P_{n,m}$ определяется по формуле

$$P_{n,m} = C_n^m\, p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (6.2.7)$$

где p — вероятность попадания в цель при одном выстреле.

При зависимых выстрелах в схеме двух групп ошибок стрельбы (первая группа — индивидуальные, или не повторяющиеся при каждом выстреле, вторая — групповые, или повторяющиеся для всех выстрелов) значение $P_{n,m}$ определяется по формуле

$$P_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_n^m\, [p(x_г, y_г)]^m \times$$

$$\times [1 - p(x_г, y_г)]^{n-m} f(x_г, y_г)\, dx_г\, dy_г, \qquad (6.2.8)$$

где $p(x_г, y_г)$ — вероятность попадания в цель, вычисленная при условии, что ошибки второй группы равны $x_г$, $y_г$.

Если начало системы координат xOy совмещено с центром цели и направления координат осей параллельны главным осям эллипса ошибок первой группы, то

$$p(x_г, y_г) = \iint\limits_{(S)} \frac{1}{2\pi\sigma_{xи}\sigma_{yи}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x - x_г - \bar{x}_1)^2}{\sigma_{xи}^2} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(y - y_г - \bar{y}_1)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} dx\,dy, \tag{6.2.9}$$

где $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ — координаты точки прицеливания;

$\sigma_{xи}, \sigma_{yи}$ — средние квадратические отклонения индивидуальных ошибок.

Для единичного закона поражения (6.2.5) вероятность поражения цели равна вероятности хотя бы одного попадания в нее, т. е.

$$W(n) = R_{n,1}. \tag{6.2.10}$$

При независимых выстрелах значение $R_{n,1}$ определяется по формуле

$$R_{n,1} = 1 - (1 - p)^n. \tag{6.2.11}$$

При зависимых выстрелах в системе двух групп ошибок стрельбы значение $R_{n,1}$ определяется по формуле

$$R_{n,1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{1 - [1 - p(x_г, y_г)]^n\} \times$$

$$\times f(x_г, y_г)\,dx_г\,dy_г. \tag{6.2.12}$$

Показательный закон поражения. При независимых выстрелах вероятность поражения цели определяется по формуле

$$W(n) = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n. \tag{6.2.13}$$

Величину $\frac{p}{\omega}$ принято называть вероятностью поражающего попадания, а $\mu = np/\omega$ — математическим ожиданием числа поражающих попаданий.

Если вероятность попадания от выстрела к выстрелу изменяется, то

$$W_{\text{н}}(n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{p_i}{\omega}\right). \qquad (6.2.14)$$

При функционально зависимых выстрелах вероятность поражения цели определяется по формуле

$$W_{\text{ф}}(n) = p\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^n\right]. \qquad (6.2.15)$$

Имеет место неравенство $W_{\text{н}}(n) > W_{\text{ф}}(n)$.

Для зависимых выстрелов в схеме двух групп ошибок

$$W_{\text{ф}}(n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - \left(1 - \frac{p(x_{\text{г}}, y_{\text{г}})}{\omega}\right)^n\right] \times$$

$$\times f(x_{\text{г}}, y_{\text{г}})\, dx_{\text{г}}\, dy_{\text{г}}. \qquad (6.2.16)$$

Вместо формулы (6.2.16) используется приближенная эмпирическая формула [13] для вычисления вероятности поражения цели при зависимых выстрелах в схеме двух групп ошибок:

$$W \approx kW_{\text{н}} + (1 - k)\, W_{\text{ф}} \qquad (6.2.17)$$

или

$$W \approx k\left[1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n\right] +$$

$$+ (1 - k)\, p\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^n\right], \qquad (6.2.18)$$

где k — коэффициент, зависящий от усредненного коэффициента корреляции выстрелов r и величины $\mu = np/\omega$. Значения коэффициента k приведены в табл. 6.2.1.

Усредненный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$r = \sqrt{r_x r_y} = \frac{\sigma_{x\text{г}}\,\sigma_{y\text{г}}}{\sqrt{\left(\sigma_{x\text{г}}^2 + \sigma_{x\text{и}}^2\right)\left(\sigma_{y\text{г}}^2 + \sigma_{y\text{и}}^2\right)}} \qquad (6.2.19)$$

или

$$r = \frac{E_{x\text{г}}\,E_{y\text{г}}}{\sqrt{\left(E_{x\text{г}}^2 + E_{x\text{и}}^2\right)\left(E_{y\text{г}}^2 + E_{y\text{и}}^2\right)}}. \qquad (6.2.20)$$

где $\sigma_{x\text{г}}, \sigma_{y\text{г}}, E_{x\text{г}}, E_{y\text{г}}$ — средние квадратические и срединные отклонения групповых ошибок стрельбы;

$\sigma_{x\text{и}}, \sigma_{y\text{и}}, E_{x\text{и}}, E_{y\text{и}}$ — средние квадратические и срединные отклонения индивидуальных ошибок выстрелов.

Таблица 6.2.1

Значения коэффициента k в зависимости от r и μ

$\mu = np/\omega$	r								
	<0,5	0,50	0,60	0,70	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,02	1	1	0,99	0,98	0,94	0,91	0,87	0,82	0
0,04	1	1	0,99	0,96	0,90	0,86	0,83	0,78	0
0,06	1	0,99	0,98	0,94	0,87	0,84	0,79	0,75	0
0,08	1	0,98	0,96	0,91	0,84	0,80	0,76	0,72	0
0,10	1	0,98	0,95	0,89	0,81	0,77	0,73	0,69	0
0,20	1	0,97	0,93	0,87	0,77	0,71	0,65	0,58	0
0,40	1	0,95	0,90	0,83	0,72	0,64	0,54	0,43	0
0,60	1	0,93	0,88	0,80	0,68	0,59	0,49	0,35	0
0,80	1	0,92	0,87	0,78	0,66	0,58	0,47	0,34	0
1,00	1	0,91	0,85	0,77	0,65	0,57	0,46	0,32	0
2,00	1	0,88	0,82	0,73	0,62	0,54	0,45	0,32	0
4,00	1	0,90	0,84	0,76	0,64	0,57	0,47	0,34	0
6,00	1	0,93	0,88	0,80	0,69	0,61	0,51	0,37	0
8,00	1	0,95	0,90	0,83	0,72	0,64	0,54	0,39	0
10,00	1	0,96	0,92	0,86	0,75	0,67	0,57	0,42	0

6.3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СРЕДСТВ ПОРАЖЕНИЯ ПО ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ

Групповая цель — группа одиночных однотипных или разнотипных объектов, функционирование которых обусловлено выполнением общей задачи. Примерами групповых целей могут быть: конвой, десантный отряд, группа атакующих самолетов.

Если задачей является поражение возможно большего числа объектов из состава групповой цели, то показателем эффективности будет математическое ожидание $\overline{N}_i$ числа пораженных объектов каждого типа. Иногда вместо $\overline{N}_i$ в качестве показателя эффективности используется математическое ожидание доли пораженных объектов каждого типа:

$$\mu_i = \frac{\overline{N}_i}{N_i}, \tag{6.3.1}$$

где N_i — общее число объектов i-го типа в составе групповой цели.

В зависимости от сформулированной в задаче цели действий показателем эффективности может быть вероятность поражения не менее заданного числа $R_{N,k}$ объектов из состава групповой цели.

Достаточно полной характеристикой эффективности применения средств поражения по групповой цели является закон распределения числа пораженных объектов, выражаемый через совокупность вероятностей $P_{N,m}$ того, что из состава групповой цели будет поражено ровно m ($m=0, 1, 2, ..., N$) объектов из N.

6.3.1. Математическое ожидание числа пораженных объектов

При стрельбе по групповой цели распределение средств поражения по объектам может быть детерминированным или случайным.

Если обозначить через γ_{ij} вероятность того, что j-е средство поражения будет действовать по i-му объекту, то для детерминированного целераспределения $\gamma_{ij}=1$

(j-е средство достоверно направляется на i-й объект) или $\gamma_{ij}=0$ (j-е средство достоверно не действует по i-му объекту), а для случайного целераспределения $0<\gamma_{ij}<1$ (каждое из средств с известной вероятностью действует против любого из объектов).

Случайное распределение средств поражения по объектам может быть следствием децентрализации управления, помех со стороны противника наведению средств поражения и др.

Как детерминированное, так и случайное распределение может быть равномерным и неравномерным. При равномерном распределении математическое ожидание числа средств поражения, действующих по каждому объекту, одинаково, т. е.

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_i = \ldots = m_k = m, \qquad (6.3.2)$$

где
$$m_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij}; \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

N — число объектов в групповой цели,
k — число средств поражения.

При неравномерном распределении условие (6.3.2) не выполняется.

В общем случае математическое ожидание числа пораженных объектов определяется по формуле

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{N} \left[1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - p_{ij}\gamma_{ij}) \right]. \qquad (6.3.3)$$

где p_{ij} — вероятность поражения j-м средством i-го объекта.

Если группа состоит из неоднотипных объектов, суммирование по формуле (6.3.3) следует выполнять отдельно для каждого типа объектов, т. е. находить математическое ожидание числа пораженных объектов каждого типа.

Если применяются однотипные средства поражения по однотипным объектам, тогда $p_{ij}=p$ и

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{N} \left[1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - p\gamma_{ij}) \right]. \qquad (6.3.4)$$

В частном случае для детерминированного равномерного распределения, когда условно принимается $m_i = m = \frac{k}{N}$:

$$\overline{N}_{\text{д. р}} = N\left[1-(1-p)^{\frac{k}{N}}\right]. \qquad (6.3.5)$$

Если $m = k/N$ не является целым, то расчет целесообразно выполнять по формуле

$$\overline{N}_{\text{д. р}} = N\left[1-(1-p)^{m_1}(1-\Delta m p)\right], \qquad (6.3.6)$$

где m_1 — целая часть частного k/N;
Δm — дробная часть частного k/N.

При случайном равномерном распределении, когда условно принимается γ_{ij} одинаковым для всех i и j, т. е. $\gamma_{ij} = \gamma$, математическое ожидание числа пораженных объектов будет равно

$$\overline{N}_{\text{с. р}} = N\left[1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^k\right]. \qquad (6.3.7)$$

Пример 6.3.1. Отражается атака $N=4$ самолетов, $k=10$ артиллерийскими комплексами. Вероятность поражения самолета огнем одного артиллерийского комплекса $p=0{,}40$. Определить математическое ожидание числа сбитых самолетов при детерминированном равномерном и случайном равномерном распределениях.

Решение. По формуле (6.3.6) для детерминированного равномерного распределения

$$\overline{N}_{\text{д. р}} = N\left[1-(1-p)^{m_1}(1-\Delta m p)\right] =$$
$$= 4\left[1-(1-0{,}40)^2(1-0{,}5\cdot 0{,}40)\right] = 2{,}8 \text{ самолета.}$$

По формуле (6.3.7) для случайного равномерного распределения

$$\overline{N}_{\text{с. р}} = N\left[1-\left(\frac{p}{N}\right)^k\right] = 4\left[1-\left(1-\frac{0{,}40}{4}\right)^{10}\right] = 2{,}6 \text{ самолета.}$$

6.3.2. Вероятность поражения заданного числа объектов

При детерминированном равномерном распределении однотипных средств поражения по части объектов или по всем однотипным объектам групповой цели вероятность

поражения ровно m объектов из N обстреливаемых определяется по формуле

$$P_{N,m} = C_N^m W^m (1-W)^{N-m}, \qquad (6.3.8)$$

где $W = 1-(1-p)^{\frac{n}{N}}$ — вероятность поражения каждого объекта;

n — количество средств поражения, используемых в ударе;

p — вероятность поражения объекта одним средством.

Формула (6.3.8) справедлива для случая, когда вероятности поражения любого из объектов одинаковы.

Если объекты поражаются с разными вероятностями W_1, W_2, ..., W_n, то вероятность $P_{N,m}$ можно найти как коэффициент при z^m в разложении по степеням z производящей функции:

$$\varphi_N(z) = [(1-W_1)+W_1 z][(1-W_2)+W_2 z]\ldots\times$$

$$\times[(1-W_N)+W_N z] = \sum_{m=0}^{N} P_{N,m} z^m. \qquad (6.3.9)$$

Пример 6.3.2. Производится отражение атаки трех торпедных катеров. Выделенными средствами достигается вероятность поражения первого катера $W_1 = 0{,}40$, второго — $W_2 = 0{,}50$ и третьего — $W_3 = 0{,}60$. Найти вероятности того, что не будет поражен ни один катер, будут поражены один, два и все три катера.

Решение. Согласно формуле (6.3.9) производящая функция для $N = 3$ и $W_1 = 0{,}40$, $W_2 = 0{,}50$, $W_3 = 0{,}60$ будет $\varphi_N(z) = (0{,}60 + 0{,}40z)(0{,}50 + 0{,}50z)(0{,}40 + 0{,}60z) = 0{,}12 + 0{,}38z + 0{,}38z^2 + 0{,}12z^3$.

Таким образом:

$$P_{3,0} = 0{,}12;\ P_{3,1} = P_{3,2} = 0{,}38 \text{ и } P_{3,3} = 0{,}12.$$

При равномерном случайном распределении n однотипных средств поражения по части объектов или по всем однотипным объектам групповой цели вероятность пора-

жения ровно m объектов из обстреливаемых определяется по формуле [23]:

$$P_{N,m} = C_N^m \sum_{l=0}^{m} C_m^l (-1)^l \times$$
$$\times \left[1 - \frac{p}{N}(N - m + l)\right]^n. \qquad (6.3.10)$$

В рассмотренных выше условиях число пораженных объектов является дискретной случайной величиной, принимающей целочисленные значения в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$ при $n<N$ и $0 \leqslant m \leqslant N$ при $n > N$, так что $P_{N,m} = 0$ при $m>n$.

6.3.3. Вероятность поражения не менее заданного числа объектов

Используя значения $P_{N,m}$, полученные по формулам (6.3.8) и (6.3.10), можно определить вероятность поражения не менее заданного числа k объектов из N обстреливаемых:

$$R_{N,k} = \sum_{l=k}^{N} P_{N,l} = 1 - \sum_{l=0}^{k-1} P_{N,l}. \qquad (6.3.11)$$

Пример 6.3.3. Для условий, заданных в примере 6.3.2, найти математическое ожидание числа пораженных катеров и вероятность того, что будет поражено не менее одного и не менее двух катеров.

Решение. Математическое ожидание числа пораженных катеров будет

$$\bar{N} = \sum_{l=1}^{N} w_l = 0{,}40 + 0{,}50 + 0{,}60 = 1{,}50 \text{ катера.}$$

Вероятность поражения не менее одного катера будет

$$R_{3,1} = \sum_{l=1}^{3} P_{3,l} = 0{,}38 + 0{,}38 + 0{,}12 = 0{,}88,$$

Вероятность того, что будет поражено не менее двух катеров, составит

$$R_{3,2} = \sum_{i=2}^{3} P_{3,i} = 0,38 + 0,12 = 0,50.$$

6.4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СРЕДСТВ ПОРАЖЕНИЯ ПО ПЛОЩАДНОЙ ЦЕЛИ

6.4.1. Математическое ожидание пораженной площади цели при одном выстреле

Так как конфигурация площадной цели обычно не имеет резко очерченных границ, а величина площади определяется ориентировочно, то вполне оправданным будет при-

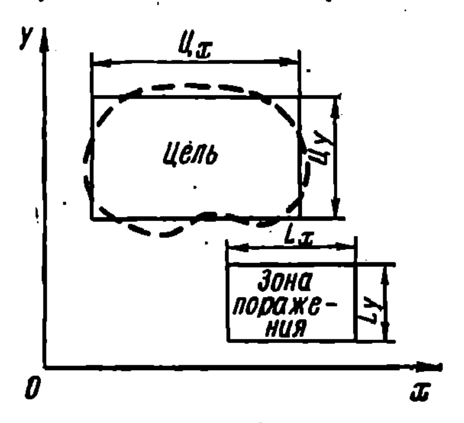


Рис. 6.4.1

менение приближенных методов расчета эффективности применения средств поражения по таким объектам.

В качестве основных допущений принимаются следующие. Площадная цель (или ее составная часть) аппроксимируется равновеликим по площади прямоугольником со сторонами $Ц_x$ и $Ц_y$. Зона поражения снаряда также заменяется равновеликим прямоугольником со сторонами L_x и L_y. Направления координатных осей избираются параллельно главным осям эллипса рассеивания точек падения снаряда (рис. 6.4.1).

Если зона поражения является кругом радиусом $R_п$, то принимается $L_x = L_y = \sqrt{\pi}\, R_п = 1{,}772\, R_п$.

При этих допущениях математическое ожидание пораженной площади цели при одном выстреле находится по формуле

$$\bar{S}_п = \frac{E_x E_y}{4}\left[\hat{\psi}\left(\frac{x_2+\bar{x}}{E_x}\right) + \hat{\psi}\left(\frac{x_2-\bar{x}}{E_x}\right) - \right.$$

$$\left. - \hat{\psi}\left(\frac{x_1+\bar{x}}{E_x}\right) - \hat{\psi}\left(\frac{x_1-\bar{x}}{E_x}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\hat{\psi}\left(\frac{y_2+\bar{y}}{E_y}\right) + \hat{\psi}\left(\frac{y_2-\bar{y}}{E_y}\right) - \right.$$

$$\left. - \hat{\psi}\left(\frac{y_1+\bar{y}}{E_y}\right) - \hat{\psi}\left(\frac{y_1-\bar{y}}{E_y}\right)\right]. \qquad (6.4.1)$$

где E_x, E_y — срединные отклонения точек падения снаряда;

$$x_1 = \frac{Ц_x - L_x}{2}; \quad x_2 = \frac{Ц_x + L_x}{2};$$

$$y_1 = \frac{Ц_y - L_y}{2}; \quad y_2 = \frac{Ц_y + L_y}{2};$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты точки прицеливания;

$\hat{\psi}(z)$ — интеграл от приведенной функции Лапласа $\hat{\Phi}(z)$:

$$\hat{\psi}(z) = \int_0^z \hat{\Phi}(z)\,dz = z\hat{\Phi}(z) - \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\left[1 - \exp\left(-\rho^2 z^2\right)\right].$$

Значения $\hat{\psi}(z)$ приведены в табл. 6.4.1.

Таблица 6.4.1

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,0	0,000	0,003	0,011	0,024	0,043	0,067	0,096	0,129	0,168	0,212
1,0	0,259	0,312	0,368	0,428	0,492	0,559	0,629	0,703	0,779	0,858
2,0	0,939	1,022	1,107	1,194	1,283	1,373	1,465	1,557	1,651	1,746
3,0	1,841	1,937	2,033	2,131	2,228	2,326	2,425	2,523	2,622	2,721
4,0	2,820	2,920	3,019	3,119	3,218	3,318	3,418	3,518	3,618	3,717

Функция $\hat{\psi}(z)$ четная, т. е. $\hat{\psi}(-z) = \hat{\psi}(z)$. При $|z| > 5$ $\hat{\Phi}(z) \approx 1$ и $\exp(-\rho^2 z^2) \approx 0$, поэтому с увеличением z до 5—6 и более для определения $\hat{\phi}(z)$ можно пользоваться приближенной зависимостью

$$\hat{\psi}(z) \approx |z| - \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} = |z| - 1{,}183.$$

Если точка прицеливания совпадает с центром цели ($\bar{x} = \bar{y} = 0$), для определения математического ожидания пораженной площади цели одним снарядом используется формула

$$\bar{S}_{п} = E_x E_y \left[\hat{\psi}\left(\frac{x_2}{E_x}\right) - \hat{\psi}\left(\frac{x_1}{E_x}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\hat{\psi}\left(\frac{y_2}{E_y}\right) - \hat{\psi}\left(\frac{y_1}{E_y}\right)\right]. \qquad (6.4.2)$$

Математическое ожидание доли пораженной площади цели при одном выстреле определяется по формуле

$$\mu = \frac{\bar{S}_{п}}{S_{ц}}, \qquad (6.4.3)$$

где $S = Ц_x Ц_y$ — площадь цели.

Пример 6.4.1. Цель имеет размеры $Ц_x = 2000$ м, $Ц_y = 1000$ м; зона поражения — круг радиусом $R_п = 310$ м; эллипс рассеивания точек падения имеет полудиаметры $E_x = 500$ м и $E_y = 400$ м. Точка прицеливания отстоит от центра цели по оси x на $\bar{x} = 425$ м и по оси y на $\bar{y} = 325$ м. Найти математическое ожидание и среднюю долю пораженной площади цели.

Решение. Заменяем зону поражения равновеликим по площади квадратом и находим $L_x = L_y = 1{,}772\,R_п = 1{,}772 \cdot 310 = 549{,}3$ м ≈ 550 м.

Находим значения:

$$x_1 = \frac{Ц_x - L_x}{2} = \frac{2000 - 550}{2} = 725 \text{ м}; \quad x_2 = \frac{Ц_x + L_x}{2} = \frac{2000 + 550}{2} = 1275 \text{ м}.$$

$$y_1 = \frac{Ц_y - L_y}{2} = \frac{1000 - 550}{2} = 225 \text{ м};$$

$$y_2 = \frac{Ц_y + L_y}{2} = \frac{1000 + 550}{2} = 775 \text{ м}.$$

По формуле (6.4.1) находим

$$\bar{S}_п = \frac{500 \cdot 400}{4}\left[\hat{\Phi}(3{,}4) + \hat{\Phi}(1{,}7) - \hat{\Phi}(2{,}3) - \hat{\Phi}(0{,}6)\right] \times$$
$$\times \left[\hat{\Phi}(2{,}75) + \hat{\Phi}(1{,}12) - \hat{\Phi}(1{,}38) - \hat{\Phi}(0{,}25)\right] = 11{,}75 \cdot 10^4 \text{ м}^2.$$

Средняя доля пораженной площади составит

$$\mu = \frac{\bar{S}_п}{S_ц} = \frac{117500}{2000000} = 0{,}059.$$

6.4.2. Математическое ожидание пораженной площади цели при нескольких выстрелах

Будем считать участок площади цели пораженным, если он накрыт зоной поражения хотя бы один раз. При равномерном обстреле цели математическое ожидание доли

пораженной площади при n выстрелах определяется по формуле

$$\mu(n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mu_i). \qquad (6.4.4)$$

где μ_i — математическое ожидание доли пораженной площади i-м выстрелом.

Если математические ожидания доли пораженной площади цели каждым выстрелом одинаковы, тогда

$$\mu(n) = 1 - (1 - \mu)^n. \qquad (6.4.5)$$

Если значения μ_i невелики, то можно пользоваться формулой

$$\mu(n) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) \qquad (6.4.6)$$

и математическое ожидание площади, пораженной n выстрелами, определять по формуле

$$\overline{S}_ц = S_ц \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{S_ц} \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i\right)\right]. \qquad (6.4.7)$$

где $\overline{S}_i$ — математическое ожидание пораженной площади цели, достигаемое i-м выстрелом.

Если для всех выстрелов S_i одинаковы ($S_1 = S_2 = \ldots = S_n = S_0$), тогда формула (6.4.7) будет иметь вид

$$\overline{S}_ц \doteq S_ц \left[1 - \exp\left(-\frac{\overline{S}_0 n}{S_ц}\right)\right]. \qquad (6.4.8)$$

6.5. УЧЕТ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ ОРУЖИЮ И НОСИТЕЛЯМ

6.5.1. Общий случай

До воздействия по цели со стороны противника может быть оказано противодействие как носителям оружия, так и применяемому оружию. Будем в общем случае носитель

оружия или снаряд (ракету, торпеду и т. п.) именовать боевой единицей.

Если для выполнения боевой задачи выделено несколько (n) боевых единиц, то в результате противодействия противника могут быть уничтожены все они, либо сохранится одна, либо две и так далее (в общем случае ровно m), либо все боевые единицы, чему соответствуют вероятности этих гипотез.

Выше были даны методы расчета показателя эффективности при условии, что по цели воздействует определенное (n) число боевых единиц.

Безусловный показатель эффективности выполнения боевой задачи с учетом противодействия противника вычисляется по формуле

$$\widetilde{W} = \sum_{m=1}^{n} Q_m W(m), \qquad (6.5.1)$$

где Q_m — вероятность того, что в результате противодействия сохранится (останутся непораженными) ровно m боевых единиц;

$W(m)$ — показатель эффективности, вычисленный при условии, что воздействие по цели оказывают ровно m боевых единиц;

n — общее число боевых единиц, выделенных для выполнения боевой задачи.

Пример 6.5.1. Для обстрела береговой площадной цели выделено три корабля ($n=3$). На переходе морем в результате атак противника каждый корабль независимо от других может быть поражен с вероятностью $p=0{,}20$. Если на огневую позицию выйдет один корабль, средняя доля пораженной площади цели $\mu(1)=0{,}40$, если два корабля — $\mu(2)=0{,}60$ и если три корабля — $\mu(3)=0{,}70$. Найти среднюю долю поражения площадной цели с учетом противодействия.

Решение. Для определения Q_m — вероятности того, что сохранится m кораблей ($m=1, 2, 3$), воспользуемся формулой

$$Q_m = C_n^{n-m} p^{n-m} (1-p)^m = C_n^m p^{n-m} (1-p)^m .$$

Получим:

$$Q_1 = 3p^2(1-p) = 3 \cdot 0{,}20^2 (1-0{,}20) = 0{,}096;$$

$$Q_2 = 3p(1-p)^2 = 3 \cdot 0{,}20 (1-0{,}20)^2 = 0{,}384;$$

$$Q_3 = (1-p)^3 = (1-0{,}20)^3 = 0{,}512.$$

По формуле (6.5.1) найдем

$$\mu = \sum_{m=1}^{3} Q_m \mu(m) = 0,096 \cdot 0,4 + 0,384 \cdot 0,6 + 0,512 \cdot 0,7 = 0,63.$$

6.5.2. Противодействие средствам поражения

Противник может противодействовать применяемому оружию, уничтожая снаряды (ракеты, торпеды и т. п.) раньше чем они дойдут до цели. При независимых выстрелах, показательном законе поражения, одинаковой вероятности попадания (p) для всех выстрелов и числе несбитых противником снарядов, подчиняющемся биномиальному закону, вероятность поражения цели определяется по формуле

$$W_n = 1 - \left(1 - \frac{pQ(n)}{\omega}\right)^n, \tag{6.5.2}$$

где $Q(n)$ — средняя вероятность того, что каждый из применяемых снарядов не будет уничтожен противником.

Принимая распределение числа несбитых снарядов подчиняющимся закону Пуассона, будем иметь

$$W_n = 1 - \exp\left(-\frac{npQ(n)}{\omega}\right). \tag{6.5.3}$$

Обе формулы являются приближенными вследствие допущения о законе распределения числа несбитых снарядов. При малом значении $pQ(n)/\omega$ результаты расчетов по формулам (6.5.2) и (6.5.3) практически совпадают. При больших $pQ(n)/\omega$ расчет по формуле (6.5.3) даст значение меньшее по сравнению с расчетом по формуле (6.5.2). Следует иметь в виду, что замена истинного закона поражения показательным при малом числе выстрелов, а также неучет зависимости между выстрелами ведут к завышению результата.

Пример 6.5.2. По кораблю противника планируется выпустить $n = 8$ снарядов; вероятность попадания каждым снарядом $p = 0,10$; среднее число снарядов для потопления корабля-цели $\omega = 2,5$. Средства обороны противника способны уничтожить каждый из снарядов с вероятностью $P(n) = 0,25$. Найти вероятность поражения цели.

Решение. Вероятность того, что каждый из выпущенных снарядов не будет уничтожен противником, равна $Q(n) = 1 - P(n) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

По формуле (6.5.2) имеем

$$W_n = 1 - \left(1 - \frac{pQ(n)}{\omega}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{0{,}10 \cdot 0{,}75}{2{,}5}\right)^8 = 0{,}2163 \approx 0{,}22.$$

Результат, вычисленный по формуле (6.5.3), будет

$$W_n = 1 - \exp\left(-\frac{npQ(n)}{\omega}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{8 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}75}{2{,}5}\right) = 0{,}2134 \approx 0{,}21.$$

6.5.3. Противодействие носителям оружия

Противник может оказать противодействие носителям оружия, лишая их боеспособности раньше чем они смогут применить оружие. Если для решения задачи выделено N носителей оружия, то число сохранивших боеспособность к моменту применения оружия будет случайным. Носители, сохранившие боеспособность, применяют оружие, которому также может быть оказано противодействие. Если число носителей, сохранивших боеспособность, считать подчиняющимся биномиальному закону распределения, вероятность сохранения боеспособности каждым из носителей одинаковой, закон поражения цели показательным, то вероятность поражения цели определяется по формуле

$$W_n = \sum_{m=0}^{N} C_N^m p_б^m (1 - p_б)^{N-m} \times \left[1 - \left(1 - \frac{pQ}{\omega}\right)^{n'm}\right]. \quad (6.5.4)$$

где N — общее число носителей, выделяемое для решения задачи;

$p_б$ — вероятность сохранения боеспособности каждым из носителей к моменту применения оружия;

n' — количество снарядов, используемых в ударе одним носителем;

Q — вероятность того, что каждый из n применяемых снарядов не будет уничтожен противником.

Если Q является функцией числа n' одного носителя $Q = Q(n')$, но не зависит от общего числа сохранивших боеспособность носителей, формула (6.5.4) преобразуется в вид [23]:

$$W_N = 1 - \left\{1 - p_б\left[1 - \left(1 - \frac{pQ(n')}{\omega}\right)^{n'}\right]\right\}^N. \quad (6.5.5)$$

Если Q зависит от общего числа снарядов в ударе $\bar{n} = n'm$, т. е. от случайного числа m носителей, сохранивших боеспособность, принимая $\bar{n}$ равным среднеожидаемому числу снарядов в ударе ($\bar{n} = Np_б n'$), можно пользоваться вместо формулы (6.5.5) приближенной формулой

$$W_N = 1 - \left\{1 - p_б\left[1 - \left(1 - \frac{pQ(\bar{n})}{\omega}\right)^{n'}\right]\right\}^N. \quad (6.5.6)$$

Пример 6.5.3. Для уничтожения главного объекта в составе группы кораблей противника выделено $N = 3$ носителя оружия, каждый из которых в ударе применяет $n' = 4$ снаряда. Вероятность сохранения боеспособности носителей к моменту удар $p_б = 0,80$, вероятность того, что каждый из снарядов не буде уничтожен противником: $Q(\bar{n}) = 0,60$. Вероятность попадания одним снарядом в цель $p = 0,70$, среднее число попаданий для поражения цели $\omega = 4$. Определить вероятность поражения цели.

Решение. Используя формулу (6.5.6), получим:

$$W_N = 1 - \left\{1 - p_б\left[1 - \left(1 - \frac{pQ(\bar{n})}{\omega}\right)^{n'}\right]\right\}^N =$$

$$= 1 - \left\{1 - 0,80\left[1 - \left(1 - \frac{0,70 \cdot 0,60}{4}\right)^4\right]\right\}^3 = 0,64.$$

Иногда расчет выполняется по формуле

$$W_N = p_б W_п = p_б\left[1 - \left(1 - \frac{pQ(\bar{n})}{\omega}\right)^{n'N}\right].$$

При этом допускается занижение результата. Так, в рассмотренном примере было бы получено

$$W_N = 0,80\left[1 - \left(1 - \frac{0,70 \cdot 0,60}{4}\right)^{12}\right] = 0,59,$$

т. е. с относительной ошибкой 8%.

6.5.4. Учет технической надежности средств поражения и носителей

В период выполнения боевой задачи возможны технические неисправности средств поражения и их носителей.

Считая независимой техническую надежность каждого из применяемых в ударе снарядов, а также каждого используемого носителя, эффективность решения боевой задачи можно определить по приближенной формуле

$$W_{N\,т} = 1 -$$
$$- \left\{1 - p_б Q_{т.\,н}\left[1 - \left(1 - \frac{pQ(\bar{n})\,Q_{т.\,к}}{\omega}\right)^{n'}\right]\right\}^N, \quad (6.5.7)$$

где $W_{N\,т}$ — эффективность решения боевой задачи с учетом противодействия противника средствам поражения, их носителям и технической надежности средств поражения и носителей;

$Q_{т.\,н}$ — техническая надежность носителя, т. е. вероятность того, что за период решения боевой задачи он не выйдет из строя вследствие технических неисправностей;

$Q_{т.\,к}$ — техническая надежность применяемых в ударе снарядов.

6.5.5. Учет противодействия при массированном использовании боевых единиц в ударе

При массированном использовании в ударе боевых единиц число их, преодолевших оборону противника, можно считать подчиняющимся пуассоновскому закону распределения. Если в ударе используются однотипные боевые единицы, противник будет стремиться распределять оборонительный потенциал по ним равномерно. Математическое ожидание доли пораженных объектов (средняя вероятность поражения каждого из объектов) определяется по формуле

$$W = 1 - \exp\left[-\frac{\alpha \exp\left(-\frac{\beta}{N_а}\right)}{N_ц}\right]. \quad (6.5.8)$$

где α — общий поражающий потенциал атакующих боевых единиц в ударе;
β — общий оборонительный потенциал сил и средств обороны противника против атакующих единиц;
$N_а$ — количество атакующих боевых единиц;
$N_ц$ — количество целей, по которым распределен удар атакующих боевых единиц.

Математическое ожидание числа пораженных объектов равно

$$\overline{N}_0 = N_0\overline{W} = N_0\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha \exp\left(-\frac{\beta}{N_а}\right)}{N_ц}\right)\right], \quad (6.5.9)$$

где N_0 — количество объектов удара.

В общем случае $N_ц$ не равно N_0. В условиях помех, создаваемых обороняющимся, атакующие боевые единицы могут нанести удар по целям, в числе которых не только назначенные к поражению объекты N_0, но и ложные цели. При отсутствии помех $N_0 = N_ц$. В общем же случае

$$N_ц \doteq N_0 + N_{л.ц}. \quad (6.5.10)$$

где $N_{л.ц}$ — количество ложных целей, по которым распределяется удар атакующих боевых единиц. Если в результате помех кроме главных объектов атакуются второстепенные (например, корабли охранения конвоя), то они должны включаться в число $N_{л.ц}$.

Значение α определяется по формуле

$$\alpha = \frac{P_\alpha n_\alpha N_\alpha}{\omega_\alpha}, \quad (6.5.11)$$

где P_α — вероятность попадания снаряда, применяемого атакующей единицей, в цель;
n_α — число снарядов, применяемых атакующей единицей;
ω_α — среднее число снарядов, необходимое для поражения объекта удара;
N_α — число атакующих боевых единиц.

Общий оборонительный потенциал β слагается из потенциала самообороны β_1 и потенциала сил и средств охранения β_2. Если $\beta_2 = 0$, то отражение удара атакующих

единиц производится только средствами самообороны. При $\beta_1=0$ объекты удара не имеют средств самообороны.

Потенциалы β_1 и β_2 определяются по формулам:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{N_r} \left(\frac{P_{\beta i} n_{\beta i}}{\omega_{\beta i}} \right); \tag{6.5.12}$$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{N_s} \left(\frac{P_{\beta j} n_{\beta j}}{\omega_{\beta j}} \right), \tag{6.5.13}$$

где $P_{\beta i}$ и $P_{\beta j}$ — вероятности попадания в атакующую боевую единицу снарядов i-го комплекса самообороны и j-го комплекса охранения;

$n_{\beta i}$ и $n_{\beta j}$ — число снарядов, используемых для отражения атакующих боевых единиц i-м и j-м комплексами;

$\omega_{\beta i}$ и $\omega_{\beta j}$ — среднее число попаданий снарядов i-го и j-го комплексов, необходимое для поражения атакующей единицы;

N_r и N_s — число комплексов самообороны и охранения соответственно.

Пример 6.5.4. Конвой в составе $N_0 = 6$ транспортов атакуется $N_a = 9$ самолетами. Каждый самолет применяет по $n_\alpha = 4$ бомбы. Вероятность попадания бомбы в транспорт $P_\alpha = 0{,}45$. Среднее число попаданий бомб для потопления транспорта $\omega_\alpha = 2{,}5$. На транспортах отсутствуют средства самообороны. Корабли охранения, находящиеся со стороны атаки самолетов, используют $N_{r1} = 8$ комплексов с характеристиками $P_{\beta 1} = 0{,}60$; $n_{\beta 1} = 2$, $\omega_{\beta 1} = 1$, а находящиеся на линии охранения со стороны, противоположной направлению атаки, $N_{r2} = 6$ комплексов с $P_{\beta 2} = 0{,}40$, $n_{\beta 2} = 1$, $\omega_{\beta 2} = 1$. Найти математическое ожидание числа пораженных транспортов конвоя.

Решение. Общий оборонительный потенциал конвоя будет

$$\beta = N_{r1}\left(\frac{P_{\beta 1} n_{\beta 1}}{\omega_{\beta 1}}\right) + N_{r2}\left(\frac{P_{\beta 2} n_{\beta 2}}{\omega_{\beta 2}}\right) =$$

$$= 8 \cdot 1{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 = 12 \text{ поражающих попаданий.}$$

Ударный потенциал атакующих самолетов

$$a=\frac{P_a n_a N_a}{\omega_a}=\frac{0{,}45\cdot 4\cdot 9}{2{,}5}=6{,}5 \text{ поражающих попаданий.}$$

Математическое ожидание потопленных транспортов находим по формуле (6.5.9):

$$\overline{N}_0=N_0\left[1-\exp\left(-\frac{a\exp(-\beta/N_a)}{N_ц}\right)\right]=$$

$$=6\left[1-\exp\left(-\frac{6{,}5\exp(-12/9)}{6}\right)\right]=1{,}5 \text{ транспорта.}$$

6.5.6. Схема последовательных ударов сторон

Если моменты воздействия оружием каждой стороны считаются известными и заданными детерминированно, то возможно составить схему последовательности ударов по типу, показанному на рис. 6.5.1.

Пусть моменты выпуска снарядов стороной А — $t_{1А}$, $t_{2А}$, $t_{3А}$, стороной Б — $t_{1Б}$, $t_{2Б}$, $t_{3Б}$. С учетом времени движения средств поражения моменты подхода их к объектам воздействия по стороне Б — $t_{1АБ}$, $t_{2АБ}$, $t_{3АБ}$ и по стороне А — $t_{1БА}$, $t_{2БА}$, $t_{3БА}$.

Если средства поражения управляются носителем, то их эффективность зависит от сохранения боеспособности носителя к моментам достижения цели каждым очередным залпом. Для средств поражения, не управляемых носителем, эффективность зависит от сохранения боеспособности носителя к моменту производства очередного пуска средств поражения.

Пусть сторона А применяет управляемые носителем ракеты, а сторона Б — автономно управляемые. Тогда для определения эффективности решения задачи стороной А следует установить последовательность ударов сторон с учетом сохранения боеспособности.

Первый залп ракет стороны А достигнет цели без противодействия носителю, второй — после первого удара и третий — после трех ударов стороны Б.

Первый залп ракет стороны Б произойдет до удара по ней стороны А, второй и третий залпы — после первого удара стороны А.

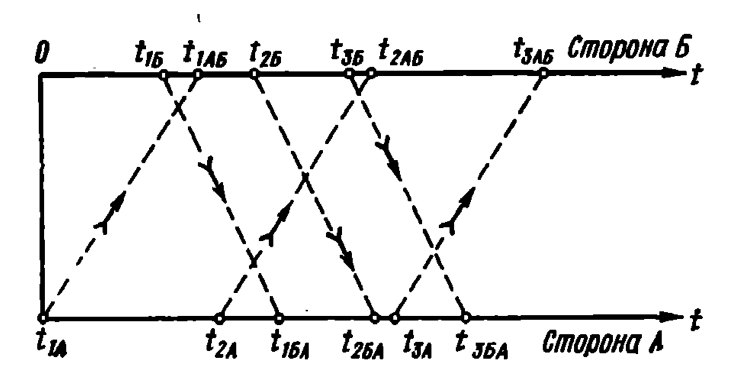


Рис. 6.5.1

Если с каждой стороны действует по одному носителю, тогда, применяя формулу полной вероятности, получим

$$W_{АБ} = W_1 + (1 - W_1)(1 - V_1) W_2 + \\ + (1 - W_1)(1 - W_2)(1 - V_1)(1 - V_2)(1 - V_3) W_3, \quad (6.5.14)$$

где $W_{АБ}$ — вероятность поражения стороны Б с учетом ее противодействия стороне А;

W_1, W_2, W_3 — вероятности поражения стороной А стороны Б 1, 2 и 3-м ударами;

V_1, V_2, V_3 — вероятности поражения стороной Б стороны А, 1, 2 и 3-м ударами.

Вероятность поражения стороной Б стороны А с учетом ее противодействия:

$$V_{БА} = V_1 + (1 - V_1)(1 - W_1) V_2 + \\ + (1 - V_1)(1 - V_2)(1 - W_1) V_3. \quad (6.5.15)$$

6.5.7. Схема непрерывного огневого воздействия в дуэльной ситуации двух боевых единиц

Если огневое воздействие сторон может рассматриваться как непрерывный процесс (например, артиллерийская стрельба) и закон поражения принимается показательным

(боевая единица может быть в двух состояниях — поражена или сохраняет боеспособность), то результат парного боя (двух боевых единиц А и Б) оценивается по формулам:

$$W(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\left[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right]; \qquad (6.5.16)$$

$$V(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\left[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right], \qquad (6.5.17)$$

где $W(t)$ — вероятность поражения стороной А стороны Б за время боя t;
$V(t)$ — вероятность поражения стороной Б стороны А за время боя t;
α — поражающий потенциал (поток успешных выстрелов в единицу времени) стороны А по Б;
β — поражающий потенциал (поток успешных выстрелов в единицу времени) стороны Б по А.

Значения α и β могут быть определены по приближенным формулам:

$$\alpha = \frac{P_\alpha \lambda_\alpha n_\alpha}{\omega_\alpha}; \qquad (6.5.18)$$

$$\beta = \frac{P_\beta \lambda_\beta n_\beta}{\omega_\beta}, \qquad (6.5.19)$$

где P_α — вероятность попадания снарядов стороны А в Б;
λ_α — средняя скорострельность оружия (орудия, пусковой установки и т. п.) стороны А;
n_α — количество оружия (орудий, пусковых установок и т. п.), используемого в бою стороной А;
ω_α — среднее необходимое число попаданий снарядов стороны А в боевую единицу стороны Б для ее поражения;
P_β, λ_β, n_β, ω_β — аналогичные величины, характеризующие эффективность оружия стороны Б.

Если боевые единицы применяют разнотипные комплексы оружия, то тогда

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m_А} \frac{P_{\alpha i}\lambda_{\alpha i}n_{\alpha i}}{\omega_{\alpha i}}; \qquad (6.5.20)$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{m_Б} \frac{P_{\beta i}\lambda_{\beta i}n_{\beta i}}{\omega_{\beta i}}, \qquad (6.5.21)$$

где $m_А$ и $m_Б$ — количество типов оружия, применяемого боевой единицей стороны А и Б соответственно.

При времени боя достаточно большом, когда $(\alpha+\beta)\,t>4$, формулы (6.5.16) и (6.5.17) определяют исход боя, т. е.

$$W = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}; \qquad (6.5.22)$$

$$V = \frac{\beta}{\alpha+\beta}. \qquad (6.5.23)$$

Пример 6.5.5. Планируется артиллерийский бой корабля А против корабля Б. Известны поражающие потенциалы кораблей за 1 минуту: $\alpha = 0,25$, $\beta = 0,15$. Определить вероятность поражения корабля Б и сохранения боеспособности кораблем А за 4 минуты боя.

Решение. По формуле (6.5.16) находим вероятность поражения корабля Б кораблем А:

$$W(4) = \frac{0,25}{0,25+0,15}\left[1 - e^{-(0,25+0,15)4}\right] = 0,50.$$

Вероятность поражения корабля А кораблем Б находим по формуле (6.5.17):

$$V(4) = \frac{0,15}{0,25+0,15}\left[1 - e^{-(0,25+0,15)4}\right] = 0,30.$$

Вероятность сохранения боеспособности кораблем А будет

$$p_б(4) = 1 - V(4) = 1 - 0,30 = 0,70.$$

Исход боя, т. е. соотношение боевых возможностей, в пользу корабля А

$$W = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{0,25}{0,25+0,15} = 0,62$$

и в пользу корабля Б

$$V = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{0,15}{0,25 + 0,15} = 0,38.$$

Если условия боя изменяются со временем, то α и β будут переменными величинами. Например, изменение в ходе боя расстояния между противниками влечет изменение вероятностей попадания снарядов, следовательно, и зависимых от них значений α и β. В этом случае результат боя можно рассчитать по формулам [47]:

$$W(t) = \int_0^t \alpha(\tau) \exp\left\{ -\int_0^\tau [\alpha(u) + \beta(u)]\, du \right\} d\tau; \quad (6.5.24)$$

$$V(t) = \int_0^t \beta(\tau) \exp\left\{ -\int_0^\tau [\alpha(u) + \beta(u)]\, du \right\} d\tau. \quad (6.5.25)$$

Из (6.5.24) и (6.5.25) при α=const и β=const следуют (6.5.16) и (6.5.17).

7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

7.1. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

7.1.1. Общие положения

Математический аппарат, разработанный в теории вероятностей для так называемых марковских случайных процессов, может быть успешно применен для математического описания многих операций, развивающихся в форме случайного процесса, и в частности для описания моделей динамики средних, массового обслуживания, технической надежности систем и других.

Случайный процесс называется *марковским*, если для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем ($t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящее время ($t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом). Например, по объекту нанесен ряд ударов. Состояние объекта, в котором он окажется после нанесения очередного удара, зависит от того, в каком состоянии он был перед этим очередным ударом, но не от того, когда и каким образом объект приведен в состояние перед очередным ударом.

7.1.2. Модель случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем (марковские цепи)

Однородная марковская цепь. Пусть система S имеет n возможных состояний S_1, S_2, ..., S_n. Обозначив P_{ij} вероятность перехода системы S за один шаг из состояния

S_i в S_j, можем составить матрицу переходных вероятностей:

$$\| P_{ij} \| = \begin{Vmatrix} P_{11}\, P_{12} \ldots P_{1j} \ldots P_{1n} \\ P_{21}\, P_{22} \ldots P_{2j} \ldots P_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{i1}\, P_{i2} \ldots P_{ij} \ldots P_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n1}\, P_{n2} \ldots P_{nj} \ldots P_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (7.1.1)$$

Некоторые из переходных вероятностей P_{ij} могут быть равны нулю. Это означает, что за один шаг переход системы из i-го состояния в j-е невозможен.

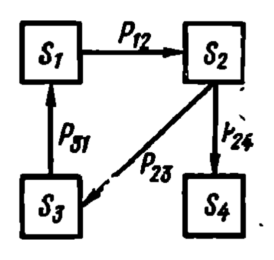


Рис. 7.1.1

Сумма членов, стоящих в каждой строке матрицы, должна быть равна единице.

Для однородной марковской цепи вероятности перехода от шага к шагу не меняются, т. е. однозначно заданы матрицей (7.1.1).

Матрица переходных состояний может быть заменена размеченным графом состояний (рис. 7.1.1). На размеченном графе состояний проставляются только те переходные вероятности, которые не равны нулю и меняют состояние системы, т. е. P_{ij} при $i \neq j$. Вероятности P_{11}, P_{22}, ... на графе состояний не проставляются, так как каждая из них дополняет до единицы сумму переходных вероятностей, соответствующих всем стрелкам, исходящим из данного состояния.

Пример 7.1.1. Для графа на рис. 7.1.1 $P_{11} = 1 - P_{12}$; $P_{22} = 1 - (P_{23} + P_{24})$; $P_{33} = 1 - P_{34}$; $P_{44} = 1$, так как переход в другое состояние невозможен.

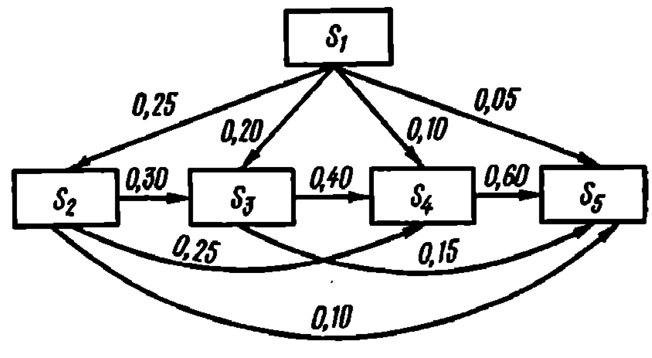


Рис. 7.1.2

Вероятности состояний, в которых окажется система после k-го шага, определяются рекуррентной формулой

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) P_{ij}, \qquad (7.1.2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $p_j(k-1)$ — вероятность состояния системы после $(k-1)$-го шага.

Например, после первого шага вероятности состояний будут:

$$p_1(1) = P_{m1};\ p_2(1) = P_{m2}; \ldots; p_m(1) = P_{mm}; \ldots; p_n(1) = P_{mn},$$

где $P_{m1}, P_{m2}, \ldots$ — вероятности перехода системы из начального состояния в 1-е состояние.

Пример 7.1.2. Группа из четырех кораблей подвергается трем последовательным ударам. Возможные состояния группы кораблей (системы S): S_1 — все корабли целы; S_2 — потоплен один корабль; S_3 — потоплено два корабля; S_4 — потоплено три корабля; S_5 — потоплены все корабли. Размеченный граф состояний системы показан на рис. 7.1.2. Найти вероятности состояний группы кораблей после трех ударов.

Решение. До первого удара все корабли целы. Из графа состояний имеем вероятности перехода из 1-го состояния в остальные:

$$P_{12} = 0{,}25;\ P_{13} = 0{,}20;\ P_{14} = 0{,}10;\ P_{15} = 0{,}05$$

и

$$P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15}) = 0{,}40.$$

Аналогично из 2-го и последующих состояний:

$$P_{21}=0;\ P_{23}=0{,}30;\ P_{24}=0{,}25;\ P_{25}=0{,}10;\ P_{22}=0{,}35;$$
$$P_{31}=0;\ P_{32}=0;\ P_{34}=0{,}40;\ P_{35}=0{,}15;\ P_{33}=0{,}45;$$
$$P_{41}=0;\ P_{42}=0;\ P_{43}=0;\ P_{45}=0{,}60;\ P_{44}=0{,}40;$$
$$P_{51}=0;\ P_{52}=0;\ P_{53}=0;\ P_{54}=0;\ P_{55}=1.$$

Матрица переходных состояний имеет вид:

$$\| P_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0{,}45 & 0{,}40 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как до первого удара все корабли целы, то $p_1(0)=1$ и поэтому после первого удара вероятности состояний будут равны значениям, взятым из первой строки матрицы:

$$p_1(1)=0{,}40;\ p_2(1)=0{,}25;\ p_3(1)=0{,}20;\ p_4(1)=0{,}10;\ p_5(1)=0{,}05.$$

Используя формулу (7.1.2), найдем вероятности состояний после второго удара:

$$p_1(2)=p_1(1)P_{11}=0{,}40\cdot0{,}40=0{,}160;$$
$$p_2(2)=p_1(1)P_{12}+p_2(1)P_{22}=0{,}40\cdot0{,}25+0{,}25\cdot0{,}35=0{,}188;$$
$$p_3(2)=p_1(1)P_{13}+p_2(1)P_{23}+p_3(1)P_{33}=$$
$$=0{,}40\cdot0{,}20+0{,}25\cdot0{,}30+0{,}20\cdot0{,}45=0{,}245;$$
$$p_4(2)=p_1(1)P_{14}+p_2(1)P_{24}+p_3(1)P_{34}+p_4(1)P_{44}=$$
$$=0{,}40\cdot0{,}10+0{,}25\cdot0{,}25+0{,}20\cdot0{,}40+0{,}10\cdot0{,}40=0{,}222;$$
$$p_5(2)=p_1(1)P_{15}+p_2(1)P_{25}+p_3(1)P_{35}+p_4(1)P_{45}+p_5(1)P_{55}=$$
$$=0{,}40\cdot0{,}05+0{,}25\cdot0{,}10+0{,}20\cdot0{,}15+0{,}10\cdot0{,}40+0{,}05\cdot1=0{,}185.$$

Вероятности состояний после третьего удара по формуле (7.1.2) будут:

$$p_1(3)=p_1(2)P_{11}=0{,}160\cdot0{,}40=0{,}0640;$$
$$p_2(3)=p_1(2)P_{12}+p_2(2)P_{22}=0{,}160\cdot0{,}25+0{,}188\cdot0{,}35=0{,}1058;$$
$$p_3(3)=p_1(2)P_{13}+p_2(2)P_{23}+p_3(2)P_{33}=$$
$$=0{,}160\cdot0{,}20+0{,}188\cdot0{,}30+0{,}245\cdot0{,}45=0{,}1986;$$
$$p_4(3)=p_1(2)P_{14}+p_2(2)P_{24}+p_3(2)P_{34}+p_4(2)P_{44}=$$
$$=0{,}160\cdot0{,}10+0{,}188\cdot0{,}25+0{,}245\cdot0{,}40+0{,}222\cdot0{,}40=0{,}2498.$$
$$p_5(3)=p_1(2)P_{15}+p_2(2)P_{25}+p_3(2)P_{35}+p_4(2)P_{45}+p_5(2)P_{55}=$$
$$=0{,}160\cdot0{,}05+0{,}188\cdot0{,}10+0{,}245\cdot0{,}15+0{,}222\cdot0{,}60+$$
$$+0{,}185\cdot1=0{,}3818.$$

Таким образом, после трех ударов вероятности исходов:
— все корабли целы $p_1(3) \approx 0{,}06$;
— один корабль будет потоплен $p_2(3) \approx 0{,}11$;
— два корабля будут потоплены $p_3(3) \approx 0{,}20$;
— три корабля будут потоплены $p_4(3) \approx 0{,}25$;
— все четыре корабля погибнут $p_5(3) \approx 0{,}38$.

Отсюда можно найти, например, вероятность того, что будет потоплено не менее двух кораблей $R_{4,2} = p_3(3) + p_4(3) + p_5(3) = 0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}38 = 0{,}83$ и не менее трех кораблей $R_{4,3} = p_4(3) + p_5(3) = 0{,}25 + 0{,}38 = 0{,}63$.

Неоднородная марковская цепь. В отличие от рассмотренной выше в неоднородной марковской цепи вероятности перехода P_{ij} меняются от шага к шагу. Для такой цепи вероятности состояний системы после k шагов находятся по формуле

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)\, P_{ij}^{(k)}; \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.1.3}$$

где $P_{ij}^{(k)} = P\left(S_j^{(k)}/S_i^{(k-1)}\right)$ — условная вероятность перехода системы из состояния S_i в состояние S_j на k-м шаге.

Пример 7.1.3. Принимаются условия, заданные в примере 7.1.2, но вероятности перехода для трех последовательных ударов различны и заданы тремя матрицами:

$$\left\| P_{ij}^{(1)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0{,}45 & 0{,}40 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| P_{ij}^{(2)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0{,}10 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}30 & 0{,}70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| P_{ij}^{(3)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0,05 & 0,10 & 0,40 & 0,25 & 0,20 \\ 0 & 0,05 & 0,45 & 0,30 & 0,20 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,55 & 0,40 \\ 0 & 0 & 0 & 0,20 & 0,80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Найти вероятности состояний группы кораблей после трех ударов.

Решение. Вероятности состояний после первого удара берем из первой строки матрицы: $p_1(1) = 0,40$; $p_2(1) = 0,25$; $p_3(1) = 0,20$; $p_4(1) = 0,10$; $p_5(1) = 0,05$.

Вероятности состояний после второго удара находим по формуле (7.1.3):

$$p_1(2) = p_1(1)\, P_{11}^{(2)} = 0,40 \cdot 0,20 = 0,080;$$

$$p_2(2) = p_1(1)\, P_{12}^{(2)} + p_2(1)\, P_{22}^{(2)} = 0,40 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,20 = 0,150;$$

$$p_3(2) = p_1(1)\, P_{13}^{(2)} + p_2(1)\, P_{23}^{(2)} + p_3(1)\, P_{33}^{(2)} = 0,40 \cdot 0,30 + 0,25 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,10 = 0,240;$$

$$p_4(2) = p_1(1)\, P_{14}^{(2)} + p_2(1)\, P_{24}^{(2)} + p_3(1)\, P_{34}^{(2)} + p_4(1)\, P_{44}^{(2)} = 0,40 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,25 + 0,20 \cdot 0,50 + 0,10 \cdot 0,30 = 0,252;$$

$$p_5(2) = p_1(1)\, P_{15}^{(2)} + p_2(1)\, P_{25}^{(2)} + p_3(1)\, P_{35}^{(2)} + p_4(1)\, P_{45}^{(2)} + p_5(1)\, P_{55}^{(2)} = 0,40 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,15 + 0,20 \cdot 0,40 + 0,10 \cdot 0,70 + 0,05 \cdot 1 = 0,278.$$

Аналогично по формуле (7.1.3) находим вероятности состояний после трех ударов:

$$p_1(3) = p_1(2)\, P_{11}^{(3)} = 0,080 \cdot 0,05 = 0,004;$$

$$p_2(3) = p_1(2)\, P_{12}^{(3)} + p_2(2)\, P_{22}^{(3)} = 0,080 \cdot 0,10 + 0,150 \cdot 0,05 = 0,0155;$$

$$p_3(3) = p_1(2)\, P_{13}^{(3)} + p_2(2)\, P_{23}^{(3)} + p_3(2)\, P_{33}^{(3)} = 0,080 \cdot 0,40 + 0,150 \cdot 0,45 + 0,240 \cdot 0,05 = 0,1115;$$

$$p_4(3) = p_1(2)\, P_{14}^{(3)} + p_2(2)\, P_{24}^{(3)} + p_3(2)\, P_{34}^{(3)} + p_4(2)\, P_{44}^{(3)} = 0,080 \cdot 0,25 + 0,150 \cdot 0,30 + 0,240 \cdot 0,55 + 0,252 \cdot 0,20 = 0,2474;$$

$$p_5(3) = p_1(2)\, P_{15}^{(3)} + p_2(2)\, P_{25}^{(3)} + p_3(2)\, P_{35}^{(3)} + p_4(2)\, P_{45}^{(3)} +$$

$$+ p_5(2)\,P_{55}^{(3)} = 0{,}080\cdot 0{,}20 + 0{,}150\cdot 0{,}20 + 0{,}240\cdot 0{,}40 + \\ + 0{,}252\cdot 0{,}80 + 0{,}278\cdot 1 = 0{,}6216.$$

После трех ударов вероятности исходов:

— все корабли останутся целыми $p_1(3) \approx 0$;
— один корабль будет потоплен $p_2(3) = 0{,}02$;
— два корабля будут потоплены $p_3(3) = 0{,}11$;
— три корабля будут потоплены $p_4(3) = 0{,}25$;
— все четыре корабля погибнут $p_5(3) = 0{,}62$.

7.1.3. Модель случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывные марковские цепи)

Вместо переходных вероятностей P_{ij} матрицы (7.1.1) здесь применяется плотность вероятности перехода λ_{ij}, которую можно представить в виде отношения:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \qquad (7.1.4)$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ — вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i, за время Δt перейдет из него в состояние S_j.

Если все плотности вероятностей λ_{ij} не зависят от t, марковский процесс называется *однородным*, если эти плотности являются функциями от времени $\lambda_{ij}(t)$, процесс называется *неоднородным*.

Вероятности состояний системы могут быть найдены интегрированием системы дифференциальных уравнений, которые называются *уравнениями Колмогорова*. Составление уравнений Колмогорова производится по определенному правилу.

Прежде всего необходимо составить размеченный граф состояний (рис. 7.1.3). Затем при написании уравнений руководствоваться следующим. В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак «минус», если в состояние — знак «плюс». Каждый член равен произведе-

нию плотности вероятности перехода, соответствующей данной стрелке, на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка. Начальные условия берутся в зави-

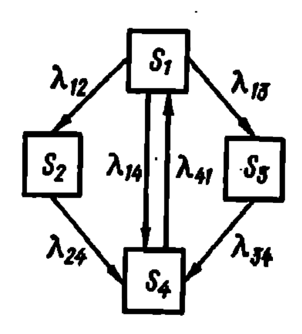


Рис. 7.1.3

симости от того, каково было начальное состояние системы S.

Пример 7.1.4. Размеченный граф состояний системы представлен на рис. 7.1.3. Написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова и начальные условия для решения этой системы, если известно, что в начальный момент система находилась в состоянии S_1.

Решение. Руководствуясь изложенным выше правилом, запишем уравнения Колмогорова:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14})\,p_1(t)+\lambda_{41}\,p_4(t);\\
\frac{dp_2(t)}{dt} &= -\lambda_{24}p_2(t)+\lambda_{12}\,p_1(t);\\
\frac{dp_3(t)}{dt} &= -\lambda_{34}p_3(t)+\lambda_{13}p_1(t);\\
\frac{dp_4(t)}{dt} &= -\lambda_{41}p_4(t)+\lambda_{14}p_1(t)+\lambda_{24}p_2(t)+\lambda_{34}p_3(t).
\end{aligned}\right\} \quad (7.1.5)$$

Начальные условия: при $t=0$ $p_1(0)=1$; $p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=0$.

Так как $p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)+p_4(t)=1$, то всех четырех уравнений можно было бы не писать, а любую из этих вероятностей выразить через три остальные.

В уравнениях (7.1.5) $p_i(t)$ — вероятность того, что в момент t система S будет находиться в состоянии

S_i ($i=1, 2, ..., n$). В дальнейшем для краткости записи аргумент t у функций p_i будет опускаться.

Коэффициенты при p_i могут быть постоянными или переменными в зависимости от того, постоянны или переменны интенсивности λ_{ij} потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние.

Уравнения для вероятностей состояния представляют собой линейные дифференциальные уравнения, которые только в редких случаях могут быть проинтегрированы в квадратурах: обычно их придется решать численно — вручную или на ЭВМ.

7.1.4. Непрерывные марковские цепи с пуассоновскими потоками событий

Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние, пуассоновские (стационарные или нестационарные), то процесс, протекающий в системе, будет марковским. Плотность вероятности перехода λ_{ij} (см. формулу 7.1.4) в непрерывной цепи Маркова представляет собой *интенсивность потока* событий.

Составление уравнений состояния системы, находящейся под воздействием пуассоновского потока событий, производится аналогично тому, как рассмотрено выше для системы, характеризуемой плотностями вероятностей перехода.

Пример 7.1.5. Артиллерийским огнем отражается атака четырех торпедных катеров, из которых один головной и три ведомые. Интенсивность потока поражающих выстрелов изменяется со временем, по мере сокращения дистанции атакующими катерами, и составляет $\lambda(t)$. Вначале огонь ведется по головному торпедному катеру. После уничтожения его огонь равномерно распределяется по трем оставшимся (ведомым) катерам. Составить размеченный граф состояний и написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

Решение. Будем нумеровать состояния системы соответственно числу сохранившихся торпедных катеров:

S_4 — все катера целы;

S_3 — головной катер уничтожен, остальные катера целы;

S_2 — головной катер и один из ведомых уничтожены, остальные катера целы;

S_1 — головной катер и два из ведомых уничтожены, один ведомый катер цел;

S_0 — все катера уничтожены.

Граф состояний показан на рис. 7.1.4.

Чтобы разметить этот граф состояний, определим интенсивность потоков поражающих выстрелов, переводящих систему из состояния в состояние.

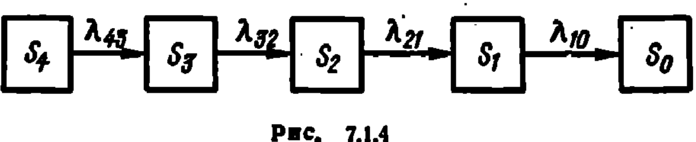


Рис. 7.1.4

Из состояния S_4 в S_3 в систему переводит поток поражающих выстрелов с интенсивностью $\lambda_{43}(t) = \lambda(t)$.

Из состояния S_3 в S_2 систему переводит поток поражающих выстрелов с интенсивностью $\lambda_{32}(t) = \lambda(t)$, так как по условиям примера после поражения головного катера огонь распределяется равномерно по остальным трем ведомым катерам.

Аналогично для $\lambda_{21}(t) = \lambda(t)$ и $\lambda_{10}(t) = \lambda(t)$.

Обозначая вероятности состояний соответственно p_4, p_3, p_2, p_1, p_0, запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = -\lambda(t)\,p_4;$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda(t)\,p_3 + \lambda(t)\,p_4;$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda(t)\,p_2 + \lambda(t)\,p_3;$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda(t)\,p_1 + \lambda(t)\,p_2;$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lambda(t)\,p_1.$$

Начальные условия (при $t=0$ все катера целы): $p_4 = 1$, $p_3 = p_2 = p_1 = p_0 = 0$.

Пример 7.1.6. Три корабля строем фронта форсируют минное поле. Плотность минного поля такова, что при принятой скорости движения кораблей интенсивность встречи с миной λ. При встрече с миной корабль принимает меры защиты и гибнет с вероятностью p. Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояния системы.

Решение. Состояния системы характеризуются числом сохраненных кораблей. Все корабли равноценны, с одинаковой интенсивностью и независимо могут встретить мину. Вероятность гибели корабля при встрече с миной одинакова для каждого из них.

Пронумеруем состояния системы:

S_3 — все корабли остались непораженными;

S_2 — один корабль погиб, два остались целыми;

S_1 — два корабля погибли, один остался целым;

S_0 — все корабли погибли.

Граф состояний показан на рис. 7.1.5. Разметим граф, для чего определим интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние.

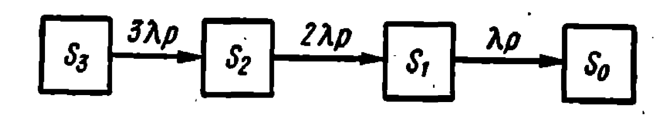


Рис. 7.1.5

Из состояния S_3 в S_2 систему переводит поток поражающих встреч с минами. Интенсивность встреч равна λ, но не все они поражающие, каждая из них оказывается поражающей только с вероятностью p. Так как система S в состоянии S_3 состоит из трех кораблей, на каждый из них действует поток поражающих встреч с интенсивностью λp, то на систему в целом действует суммарный поток поражающих встреч с интенсивностью $3\lambda p$.

Аналогично из состояния S_2 в S_1 система переводится потоком поражающих встреч $2\lambda p$, а из S_1 в S_0 — λp.

Вероятности состояний системы обозначим соответственно p_3, p_2, p_1, p_0.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний имеют вид (аргумент t для краткости записи опускаем):

$$\frac{dp_3}{dt} = -3\lambda p p_3;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -2\lambda p p_2 + 3\lambda p p_3;$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda p p_1 + 2\lambda p p_2;$$

$$\frac{dp_0}{dt} = \lambda p p_1.$$

Начальные условия (при $t = 0$ все корабли целы): $p_3 = 1$; $p_2 = p_1 = p_0 = 0$.

7.1.5. Предельные вероятности состояний

Если число состояний системы S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в каждое другое состояние, то предельные вероятности

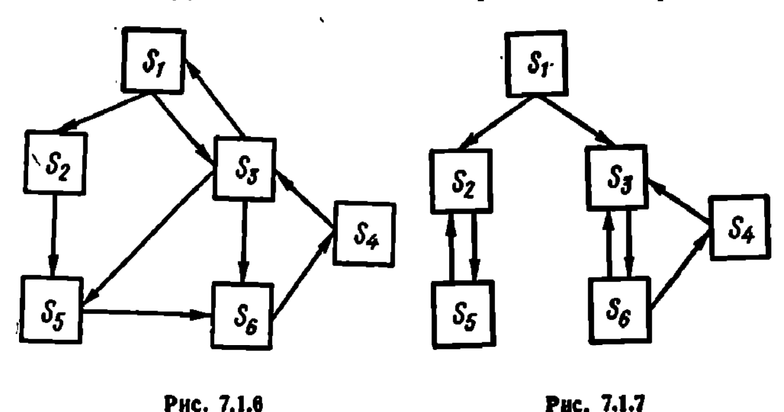


Рис. 7.1.6 Рис. 7.1.7

состояний существуют и не зависят от начального состояния системы. Например, система, представленная графом состояний на рис. 7.1.6, из любого состояния может перейти в любое другое. Напротив, для системы, граф состояний которой показан на рис. 7.1.7, переход в состояние S_6 возможен из S_1, но невозможен из S_4. При $t \to \infty$ и λ=const (интенсивности потоков событий постоянны) в системе S (рис. 7.1.6) устанавливается некоторый предельный стационарный режим: система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них не зависит от времени — каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью. При этом предельные вероятности состояний p_i, так же как и допредельные, в сумме должны давать единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{7.1.6}$$

Предельные вероятности состояний дают средние относительные величины времени пребывания системы в данном состоянии.

Для вычисления предельных вероятностей состояний нужно составить систему уравнений Колмогорова, описывающих вероятности состояний, и решить ее, положив левые части (производные) равными нулю (в предельном

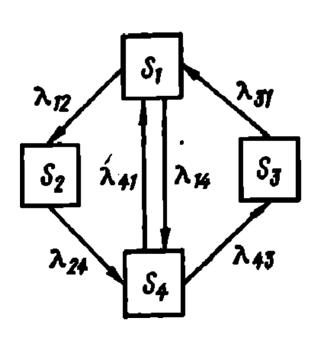


Рис. 7.1.8

режиме все вероятности состояний постоянные и их производные равны нулю). В этом случае система дифференциальных уравнений превратится в систему линейных алгебраических уравнений, которая решается при нормировочном условии (формула 7.1.6).

Пример 7.1.7. Система S имеет возможные состояния S_1, S_2, S_3, S_4, размеченный граф которых показан на рис. 7.1.8. Вычислить предельные вероятности состояний p_1, p_2, p_3, p_4, если интенсивности потоков событий равны $\lambda_{12} = 2$; $\lambda_{14} = 1$; $\lambda_{24} = 1$; $\lambda_{31} = 3$; $\lambda_{41} = 2$; $\lambda_{43} = 2$.

Решение. Запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{14})p_1 + \lambda_{31}p_3 + \lambda_{41}p_4;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31}p_3 + \lambda_{43}p_4;$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{43})p_4 + \lambda_{14}p_1 + \lambda_{24}p_2.$$

Полагая левые части равными нулю и поставив значения λ_{ij}, получим систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний:

$$0 = -3p_1 + 3p_3 + 2p_4;$$

$$0 = -p_2 + 2p_1;$$

$$0 = -3p_3 + 2p_4;$$

$$0 = -4p_4 + p_1 + p_2.$$

Решение уравнений при нормировочном условии (формула 7.1.6) дает: $p_1 = 4/17$; $p_2 = 8/17$; $p_3 = 2/17$; $p_4 = 3/17$.

Это значит, что в предельном установившемся режиме система S будет находиться в состоянии S_1 в среднем четыре семнадцатых части времени, в состоянии S_2 — восемь семнадцатых, в состоянии S_3 — две семнадцатых и в состоянии S_4 — три семнадцатых.

7.1.6. Процесс «гибели и размножения»

Схема «гибели и размножения» связана с решением задач биологии, в которых рассматривается процесс изменения численности популяции. Однако модель подобного

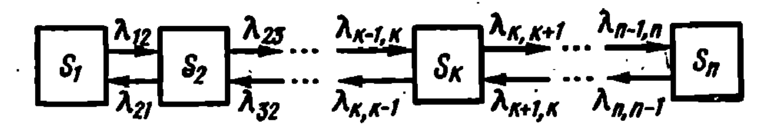


Рис. 7.1.9

процесса применима во многих других областях исследования.

Граф состояний системы, описываемой схемой гибели и размножения, представлен на рис. 7.1.9. Каждое из средних состояний (S_2, ..., S_{n-1}) связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния S_1 и S_n — только с одним соседним состоянием.

Для такой системы, решив алгебраические уравнения для вероятностей состояния, можно получить справедли-

вые при любом числе состояний формулы определения предельных вероятностей состояния [12]:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 = 1 : \Bigg(1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} + \ldots \\
\ldots + \frac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\ldots\lambda_{21}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}} \Bigg); \\
p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1; \\
p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\ldots\lambda_{21}} p_1; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}} p_1.
\end{aligned}\right\} \quad (7.1.7)$$

Как видно из выражений (7.1.7), значение p_1, полученное из первой формулы, используется во всех остальных.

Пример 7.1.8. Три автомобиля в сложных дорожных условиях совершают перевозки грузов. Каждый из них может выйти из строя. Поток отказов простейший, среднее время безотказной работы каждого автомобиля $\bar{t}_0 = 10$ суток. Вышедший из строя автомобиль сразу же начинает ремонтироваться, среднее время ремонта $\bar{t}_в = 2$ суток. Закон распределения времени ремонта показательный (поток восстановлений простейший).

Найти среднее время пребывания системы из трех автомобилей в каждом из возможных состояний.

Решение. Обозначим возможные состояния системы:
S_1 — все три автомобиля исправны;
S_2 — один автомобиль ремонтируется, два исправны;
S_3 — два автомобиля ремонтируются, один исправен;
S_4 — все три автомобиля ремонтируются.

Граф состояний показан на рис. 7.1.10. Разметим этот граф. Стрелками вправо покажем интенсивности потока отказов, влево — восстановления.

Так как поток отказов простейший, то промежутки времени между отказами в этом потоке распределены по показательному закону с параметром $\lambda_0 = 1/\bar{t}_0$. Следовательно, интенсивность отказов равна $\lambda_0 = 1/\bar{t}_0 = 0{,}1$ сут$^{-1}$.

Интенсивность потока восстановлений будет $\lambda_в = 1/\bar{t}_в = 1/2$ сут$^{-1}$.

Если система находится в состоянии S_1, то работают три автомобиля, каждый из них подвергается потоку отказов с интенсивностью λ_0. Следовательно, на всю систему (три работающих

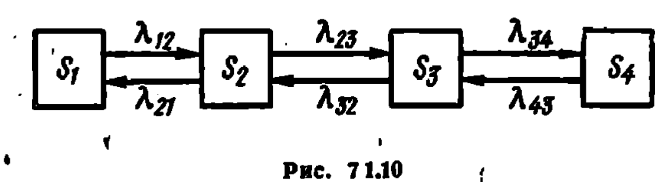


Рис. 7.1.10

автомобиля) поток отказов действует с интенсивностью в три раза большей: $\lambda_{12} = 3\lambda_0 = 3/10$ сут$^{-1}$.

Соответственно, если система находится в состоянии S_2 (два исправных автомобиля), то $\lambda_{23} = 2\lambda_0 = 2/10$ сут$^{-1}$, и если в состоянии S_3, то $\lambda_{34} = \lambda_0 = 1/10$ сут$^{-1}$.

Аналогично рассуждая, получим интенсивность потоков восстановлений: $\lambda_{43} = 3\lambda_в = 3/2$ сут$^{-1}$; $\lambda_{32} = 2\lambda_в = 1$ сут$^{-1}$; $\lambda_{21} = \lambda_в = 1/2$ сут$^{-1}$.

Пользуясь формулами (7.1.7), находим предельные вероятности состояний:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{34}\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{43}\lambda_{32}\lambda_{21}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3\cdot 2}{10\cdot 1} + \frac{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 1\cdot 1} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 3\cdot 1\cdot 1}} = 0{,}579;$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \frac{3\cdot 2}{10\cdot 1} 0{,}579 = 0{,}347;$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1 = \frac{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 1\cdot 1} 0{,}579 = 0{,}069;$$

$$p_4 = \frac{\lambda_{34}\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{43}\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 3\cdot 1\cdot 1} 0{,}579 = 0{,}005.$$

Таким образом, будут исправными: все три автомобиля — 57,9% времени, два — 34,7% и один — 6,9% времени. Одновременно окажутся неисправными все три автомобиля в течение 0,5% времени.

7.1.7. Циклический процесс

Если состояния системы связаны в кольцо (цикл) с односторонними переходами (рис. 7.1.11), процесс, протекающий в такой системе, называется *циклическим*.

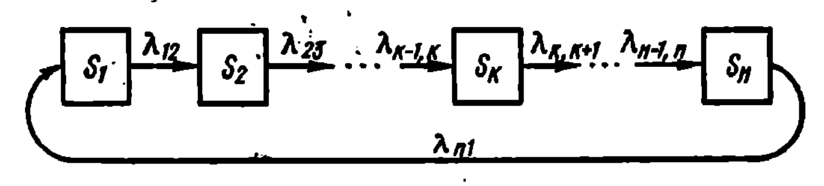


Рис. 7.1.11

Вероятности состояний системы для циклического процесса находятся по формулам [12]:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{1+\lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}}+\frac{1}{\lambda_{34}}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n-1,n}}+\frac{1}{\lambda_{n,1}}\right)};\\
p_2 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}p_1;\\
p_3 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}}p_1;\\
&\ldots\ldots\\
p_k &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k,k+1}}p_1;\\
&\ldots\ldots\\
p_n &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n,1}}p_1.
\end{aligned}\right\} \quad (7.1.8)$$

Пример 7.1.9. Рыболовный траулер, занимаясь промыслом, производит поиск косяка рыбы, ловлю ее и передачу рефрижератору, затем цикл повторяется. Интенсивности потоков событий λ_{12}, λ_{23}, λ_{31}. Найти предельные вероятности состояний системы.

Решение. Размеченный граф состояний показан на рис. 7.1.12, где S_1 — поиск косяка рыбы, S_2 — вылов рыбы и S_3 — переход к рефрижератору и передача ему рыбы.

Используя формулы (7.1.8), получим предельные вероятности состояний:

$$
\left.
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{1+\lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}}+\frac{1}{\lambda_{31}}\right)};\\
p_2 &= \frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}}{1+\lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}}+\frac{1}{\lambda_{31}}\right)};\\
p_3 &= \frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}{1+\lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}}+\frac{1}{\lambda_{31}}\right)}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (7.1.9)
$$

Рис. 7.1.12

Тот же результат можно получить, руководствуясь общим правилом определения предельных вероятностей состояний. Для этого вначале составляем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{31}p_3;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23}p_2 + \lambda_{12}p_1;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31}p_3 + \lambda_{23}p_2.$$

Приравняв нулю левые части уравнений, получим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний:

$$\lambda_{12}p_1 = \lambda_{31}p_3;$$
$$\lambda_{23}p_2 = \lambda_{12}p_1;$$
$$\lambda_{31}p_3 = \lambda_{23}p_2,$$

решение которых при нормировочном условии: $p_1+p_2+p_3=1$ даст тот же результат, что и решение по формулам (7.1.9).

Если заданы средние $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, ..., $\bar{t}_n$ пребывания системы S в состояниях S_1, S_2, ..., S_n, то предельные ве-

роятности состояний в циклической схеме определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_n}; \\ p_2 &= \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_n}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \frac{\bar{t}_n}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_n}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.1.10)$$

Или в общем случае

$$p_k = \frac{\bar{t}_k}{\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7.1.11)$$

7.2. МЕТОД ДИНАМИКИ СРЕДНИХ

7.2.1. Общие положения

Методы описания случайных процессов с помощью математического аппарата марковских цепей, изложенные в разделе 7.1, удобны только в случаях, когда число возможных состояний системы S сравнительно невелико. При большом числе возможных состояний системы (несколько десятков, сотен) возникают трудности, к которым можно отнести следующие. Совместное решение большого числа дифференциальных или алгебраических уравнений затруднено даже при наличии ЭВМ. Кроме того, если даже и найдены вероятности состояний системы, то результаты будут труднообозримыми.

Разрешение этих трудностей возможно, если, минуя вероятности состояний системы, получать решения для средних характеристик состояния системы, т. е. применять метод динамики средних.

7.2.2. Общий принцип составления дифференциальных уравнений для средних численностей состояний (уравнений динамики средних)

Здесь для раскрытия идеи метода элементы системы считаются однородными, интенсивности потоков событий — независимыми от средних численностей состояний системы.

Сущность метода динамики средних заключается в следующем. Рассматривается не состояние системы в целом, а отдельного ее элемента. Каждый элемент может быть в любом из n возможных состояний: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Состояние системы в целом в каждый момент t характеризуется численностью состояний, т. е. числом единиц, находящихся в состоянии ε_k, которое будет случайным. Характеристиками случайной величины $X_k(t)$ — численности единиц (элементов), находящихся в момент t в состоянии ε_k, являются математическое ожидание

$$m_k(t) = M[X_k(t)] \tag{7.2.1}$$

и дисперсия

$$D_k(t) = D[X_k(t)]. \tag{7.2.2}$$

Для нахождения этих характеристик необходимо знать интенсивности всех потоков событий, переводящих элемент (не систему, как в разделе 7.1) из состояния в состояние.

Таким образом, задача сводится к определению вероятностей состояния одного отдельного элемента. А это может быть получено решением дифференциальных уравнений Колмогорова, правила составления которых изложены в разделе 7.1.

Математическое ожидание и дисперсия численности k-го состояния будут равны:

$$m_k(t) = Np_k(t); \tag{7.2.3}$$

$$D_k(t) = Np_k(t)(1 - p_k(t)) = m_k(t) \times \times \left(1 - \frac{m_k(t)}{N}\right). \tag{7.2.4}$$

где $p_k(t)$ — вероятность того, что отдельный элемент в момент t будет находиться в состоянии ε_k.

Зная дисперсию $D_k(t)$, можно найти среднее квадратическое отклонение численности состояния ε_k:

$$\sigma_k(t) = \sqrt{Np_k(t)(1 - p_k(t))} = \sqrt{m_k(t)\left(1 - \frac{m_k(t)}{N}\right)}. \quad (7.2.5)$$

В общем случае для любого момента времени t ориентировочное значение диапазона практически возможных значений численности будет равно

$$m_k(t) = \pm 3\sigma_k(t). \quad (7.2.6)$$

Если число элементов N в системе велико, то численность k-го состояния можно считать распределенной по нормальному закону. Тогда вероятность того, что численность k-го состояния будет заключена в пределах от α до β, находится по формуле

$$P(\alpha < X_k < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - m_k}{\sigma_k}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_k}{\sigma_k}\right)\right]^{*}. \quad (7.2.7)$$

где m_k, σ_k — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение численности k-го состояния;

$\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Пусть система S состоит из N однородных элементов типа ε и в ней протекает марковский случайный процесс.

Для составления дифференциальных уравнений средних численностей состояний (уравнений динамики средних) такой системы необходимо вначале составить размеченный граф состояний каждого элемента с указанием интенсивности λ_{ij} всех потоков событий, переводящих элемент ε из состояния в состояние (рис. 7.2.1). Затем руководствоваться следующим правилом: производная средней числен-

* Формулы (7.2.4) — (7.2.7) применимы только для условий, когда элементы системы однородные, интенсивности потоков событий независимы от средних численностей состояний системы.

ности состояния равна сумме стольких членов, сколько стрелок связано с данным состоянием; если стрелка направлена из состояния, член имеет знак «минус», если в

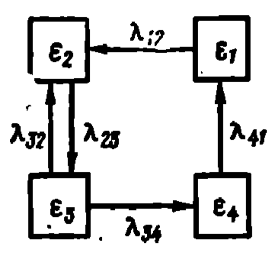


Рис. 7.2.1.

состояние — знак «плюс»; каждый член равен произведению интенсивности потока событий, переводящего элемент по данной стрелке, на среднюю численность того состояния, из которого исходит стрелка $(\lambda_{kj} m_k(t))$.

Нормирующим условием будет

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t) = N. \qquad (7.2.8)$$

Пример. 7.2.1. Система S состоит из N однородных элементов. Граф состояний каждого элемента представлен на рис. 7.2.1. В начальный момент $t=0$ все элементы находятся в состоянии ε_1. Написать систему дифференциальных уравнений для средних численностей состояний.

Решение. Руководствуясь сформулированным выше правилом и имея размеченный граф состояний элементов системы, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_{12} m_1 + \lambda_{41} m_4; \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\lambda_{23} m_2 + \lambda_{12} m_1 + \lambda_{32} m_3; \\ \frac{dm_3}{dt} &= -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) m_3 + \lambda_{23} m_2; \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\lambda_{41} m_4 + \lambda_{34} m_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.9)$$

где m_1, m_2, m_3, m_4 — средние численности состояний, удовлетворяющие условию (7.2.3). Для краткости записи аргумент t опущен.

Учитывая нормирующее условие (7.2.8): $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = N$, можем одно из уравнений (7.2.9) отбросить. Если это будет, например, второе (наиболее сложное), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_{12} m_1 + \lambda_{41} m_4; \\ \frac{dm_3}{dt} &= -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) m_3 + \lambda_{23} [N - (m_1 + m_3 + m_4)]; \\ \frac{dm_4}{dt} &= -\lambda_{41} m_4 + \lambda_{34} m_3. \end{aligned}\right\} \quad (7.2.10)$$

Так как при $t = 0$ все элементы находятся в состоянии s_1, то начальными условиями (при $t = 0$) будут:

$$m_1 = N; \ m_2 = m_3 = m_4 = 0.$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (7.2.10) производится на ЭВМ или вручную методом численного интегрирования. В результате будут получены значения средних численностей состояний: $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$, $m_4(t)$. Значения дисперсий и средних квадратических отклонений численностей состояний вычисляются по формулам (7.2.4) и (7.2.5).

7.2.3. Принцип квазирегулярности

В общем случае интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, зависят от того, сколько элементов в данном состоянии имеется в системе. Численности же состояний системы являются случайными, поэтому и интенсивности потоков событий будут случайными. Это обстоятельство затрудняет составление уравнений динамики средних по изложенному ранее принципу, так как неизвестны численности состояний, определяющих интенсивности потоков событий.

Преодоление такого рода затруднений достигается допущением, которое носит название *принципа квазирегулярности*. Принимается, что интенсивность потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, зависит не от самих численностей состояний, а от их средних значений (математических ожиданий).

Погрешности результатов, которые возникнут вследствие такого допущения для описания процесса, будут тем

меньше, чем более многочисленна группа элементов и чем ближе к линейным функции, выражающие интенсивности потоков событий в зависимости от численности состояний.

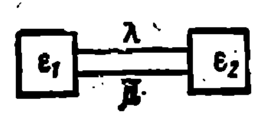


Рис. 7.2.2

Принцип составления дифференциальных уравнений динамики средних остается таким же, как описано выше (формулы 7.2.9), только интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, будут функциями математического ожидания численностей элементов для соответствующих состояний.

Пример. 7.2.2. Цех состоит из большого числа однотипных станков. На каждый из них действует поток неисправностей с интенсивностью λ, не зависящей от числа станков, находящихся в исправном состоянии. Ремонтом занимается бригада рабочих. Ремонт организован так, что за единицу времени исправляется в среднем число станков, определяемое зависимостью $\mu = \varphi(N_2)$, где N_2 — число неисправных станков. Написать дифференциальные уравнения динамики средних для средних численностей состояний.

Решение. Каждый станок может быть в двух состояниях: ε_1 исправен; ε_2 — неисправен, ремонтируется.

Граф состояний показан на рис. 7.2.2. На нем поток интенсивности неисправностей λ. Средняя интенсивность потока ремонтов, приходящихся на один станок, будет

$$\tilde{\mu} = \varphi_1(N_2) = \frac{\varphi(N_2)}{N_2}. \qquad (7.2.11)$$

Число станков N_2, находящихся в ремонте, является случайным. Согласно принципу квазирегулярности заменяем его математическим ожиданием m_2 и на основе графа состояний запишем дифференциальные уравнения динамики средних для средних численностей m_1 и m_2 состояний ε_1 и ε_2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda m_1 + \varphi_1(m_2)\, m_2; \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\varphi_1(m_2)\, m_2 + \lambda m_1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.12)$$

Учитывая, что $\varphi_1(m_2) = \varphi(m_2)/m_2$, уравнения запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda m_1 + \varphi(m_2); \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\varphi(m_2) + \lambda m_1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.13)$$

Нормирующее условие: $m_1 + m_2 = N$.

Начальные условия (при $t = 0$): $m_1 = N$; $m_2 = 0$.

7.2.4. Учет пополнения численности состояний

На практике встречаются задачи с моделированием таких процессов, при которых численности элементов, находящихся в каких-то состояниях, пополняются извне.

Пусть система S состоит из N однородных элементов и имеет размеченный граф состояний, показанный на рис. 7.2.3. Контингент элементов, находящихся в состоянии ε_1, пополняется извне с интенсивностью δ элементов за единицу времени. Величина δ может быть постоянной или переменной, как зависящей, так и не зависящей от средних численностей состояний.

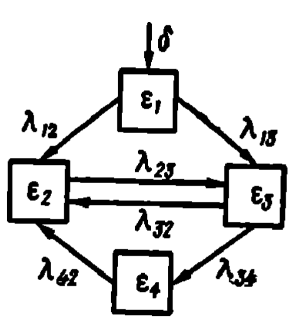


Рис. 7.2.3

Дифференциальные уравнения динамики средних с учетом пополнения численности состояний составляются по изложенному ранее принципу, но к правой части соответствующего дифференциального уравнения прибавляется слагаемое, равное интенсивности пополнения — среднему числу элементов, вводимых в данное состояние за единицу времени.

Пример 7.2.3. Написать уравнения динамики средних с учетом пополнения для системы, представленной размеченным графом состояний на рис. 7.2.3.

Решение. Руководствуясь общим правилом составления дифференциальных уравнений динамики средних и частным правилом учета пополнения численности состояний, получим:

$$\frac{dm_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})\, m_1 + \delta;$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\lambda_{23} m_2 + \lambda_{12} m_1 + \lambda_{32} m_3 + \lambda_{42} m_4;$$

$$\frac{dm_3}{dt} = -(\lambda_{32} + \lambda_{34})\, m_3 + \lambda_{13} m_1 + \lambda_{23} m_2;$$

$$\frac{dm_4}{dt} = -\lambda_{42} m_4 + \lambda_{34} m_3.$$

Общее число элементов в системе будет изменяться со временем и условие (7.2.8) запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t) = N(t);$$

$$N(t) = N_0 + \int_0^t \delta(t)\,dt,$$

где N_0 — начальное значение численности элементов.

7.3. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ БОЯ

7.3.1. Модель высокоорганизованного боя

Условно так называется модель боя, в котором стрельба ведется только по непораженным целям, перенос огня с пораженной единицы на боеспособную осуществляется немедленно. Кроме того, одним выстрелом не может быть поражено более одной единицы и огонь распределен равномерно по непораженным единицам. Каждая боевая единица может быть в одном из двух состояний: не поражена (ведет огонь) и поражена (прекратила огонь). Здесь приводятся только общие правила составления уравнений динамики боя, основанные на теории марковских случайных цепей, и даются некоторые частные решения.

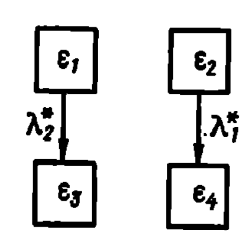


Рис. 7.3.1

Составление уравнений динамики боя производится по тому же правилу, которое дано в разделе 7.2 для составления уравнений динамики средних.

Составление уравнений динамики боя рассмотрим для следующих условий. Две группировки А и Б первоначальной численностью N_1 и N_2, однородных внутри каждой группировки боевых единиц (не обязательно однородных между группами А и Б), ведут бой. Скорострельности боевых единиц стороны А—λ_1, стороны Б—λ_2, вероятности поражения на выстрел соответственно p_1 и p_2. Обстрелу

подвергается с равной вероятностью любая из непораженных боевых единиц противоположной стороны и после ее поражения огонь переносится на еще не пораженную. Одним выстрелом нельзя поразить более одной боевой единицы.

Обозначим возможные состояния боевой единицы каждой из сторон:

ε_1 — боевая единица стороны А не поражена;
ε_2 — боевая единица стороны Б не поражена;
ε_3 — боевая единица стороны А поражена;
ε_4 — боевая единица стороны Б поражена.

Размеченный граф состояний, разделенный на два подграфа, показан на рис. 7.3.1.

Для начального состояния:

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1 p_1 N_1}{N_2} \text{ и } \lambda_2^* = \frac{\lambda_2 p_2 N_2}{N_1},$$

где λ_2^* — интенсивность потока поражающих выстрелов, приходящихся на одну боевую единицу стороны А, переводящих ее из состояния ε_1 в ε_3;

λ_1^* — интенсивность потока поражающих выстрелов, приходящихся на одну боевую единицу стороны Б, переводящих ее из состояния ε_2 в ε_4.

Однако в ходе боя численности сторон меняются со временем, поэтому, пользуясь принципом квазирегулярности, можем принять:

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1 p_1 m_1(t)}{m_2(t)} \text{ и } \lambda_2^* = \frac{\lambda_2 p_2 m_2(t)}{m_1(t)}. \tag{7.3.1}$$

С учетом (7.3.1) на основании графа (рис. 7.3.1) получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} &= -\lambda_2 p_2 m_2(t); \\ \frac{dm_2(t)}{dt} &= -\lambda_1 p_1 m_1(t). \end{aligned}\right\} \tag{7.3.2}$$

Уравнения для $m_3(t)$ и $m_4(t)$ нет необходимости записывать, так как для любого t:

$$m_1(t) + m_3(t) = N_1 \text{ и } m_2(t) + m_4(t) = N_2,$$

11*

кроме того, обычно требуется знать состояния численностей не уничтоженных, а боеспособных единиц.

Уравнения (7.3.2) можно решать при любых начальных условиях. В нашем конкретном примере в начальный момент (при $t=0$): $m_1=N_1$; $m_2=N_2$.

Уравнения (7.3.2) пригодны для описания динамики боя только на начальных его стадиях, когда численности группировок еще можно считать многочисленными.

7.3.2. Модель боя без переноса огня

В отличие от рассмотренной выше модели боя здесь принимается, что информация о состоянии противника не поступает и перенос огня не производится. Поэтому вместо (7.3.1) следует принять:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^* &= \frac{\lambda_1 p_1 m_1(t)}{N_2}; \\ \lambda_2^* &= \frac{\lambda_2 p_2 m_2(t)}{N_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.3)$$

Тогда уравнения (7.3.2) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} &= -\frac{\lambda_2 p_2}{N_1} m_1(t)\, m_2(t); \\ \frac{dm_2(t)}{dt} &= -\frac{\lambda_1 p_1}{N_2} m_1(t)\, m_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.4)$$

7.3.3. Модель боя с учетом времени полета снаряда и запаздывания в переносе огня

Модели (7.3.2) и (7.3.4) представляют два крайних случая в организации боя. В реальных условиях перенос огня с непораженных единиц на пораженные производится с некоторым запаздыванием вследствие задержки с получением информации о состоянии обстреливаемых целей и невозможности изменения целераспределения после выстрела.

Динамика боя с учетом времени полета снаряда и запаздывания в переносе огня описывается уравнениями [23]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dm_1(t)}{dt} &= -p_2\lambda_2(t-\tau_2)\,m_2(t-\tau_2)\frac{m_1(t)}{m_1\left(t-T'_{\text{зап}}\right)};\\ \frac{dm_2(t)}{dt} &= -p_1\lambda_1(t-\tau_1)\,m_1(t-\tau_1)\frac{m_2(t)}{m_2\left(t-T''_{\text{зап}}\right)},\end{aligned}\right\}\quad(7.3.5)$$

где

τ_1 и τ_2 — время полетов снарядов сторон А и Б;

$T'_{\text{зап}}$ и $T''_{\text{зап}}$ — время запаздывания для сторон А и Б в перенацеливании огня боевых единиц с пораженных элементов на непораженные;

$\lambda_1(t-\tau_1)$ и $\lambda_2(t-\tau_2)$ — скорострельности боевых единиц сторон А и Б в момент производства выстрелов;

$m_1(t-\tau_1)$ и $m_2(t-\tau_2)$ — числа боеспособных единиц сторон А и Б в момент производства выстрелов;

$m_1\left(t-T'_{\text{зап}}\right)$ и $m_2\left(t-T''_{\text{зап}}\right)$ — числа боеспособных единиц в момент получения информации о результатах обстрела;

$m_1(t)$ и $m_2(t)$ — числа боеспособных непораженных единиц сторон А и Б к моменту времени t.

При этом

$m_1(t-\tau_1) = N_1$ при $0 < t < \tau_1$;

$m_2(t-\tau_2) = N_2$ при $0 < t < \tau_2$;

$m_1\left(t-T'_{\text{зап}}\right) = N_1$ при $0 < t < T'_{\text{зап}}$;

$m_2\left(t-T''_{\text{зап}}\right) = N_2$ при $0 < t < T''_{\text{зап}}$.

7.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системы массового обслуживания могут быть двух типов — с отказами и с ожиданием (с очередью).

В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, покидает систему и в дальнейшем процессе не участвует. В системах с ожиданием заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и принимается к обслуживанию, как только освободится один из каналов.

Основными параметрами системы массового обслуживания являются: n — число каналов; λ — интенсивность потока заявок (среднее число заявок, поступающих в единицу времени); μ — производительность каждого канала (среднее число заявок, обслуживаемых каналом в единицу времени), а также ограничения (длина очереди, время пребывания заявки в очереди и др.).

Сведения данного раздела относятся только к системам массового обслуживания, в которых все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются пуассоновскими (потоками без последствий). Для математического описания таких процессов применяется аппарат марковских случайных процессов (раздел 7.1). В случаях когда рассматривается не марковская система массового обслуживания, рекомендуется литература [12], [18], [39], [41].

Составление дифференциальных уравнений Колмогорова для марковских систем массового обслуживания производится по правилам, изложенным в разделе 7.1.

Пример. 7.4.1. Рассматривается трехканальная система массового обслуживания с отказами. Интенсивность потока заявок λ, интенсивность потока обслуживания μ. Составить дифференциальные уравнения состояний системы.

Решение. Возможные состояния системы:

S_0 — все каналы свободны;
S_1 — занят один канал, два свободных;
S_2 — заняты два канала, один свободен;
S_3 — заняты все три канала.

Граф состояний показан на рис. 7.4.1. Разметим граф. Если система находится в состоянии S_0, то поступившая заявка переводит ее в S_1 с интенсивностью λ. Если система находится в состоянии S_1, то поступившая заявка переводит ее в S_2 с интенсивностью λ и т. д. Переход системы в обратном направлении будет при следующих условиях. Из S_1 (занят один канал)

система перейдет в S_0 тогда, когда закончится обслуживание заявки, занимающей этот канал. Интенсивность этого потока событий μ. Если обслуживанием занято два канала, то поток событий, переводящий систему из S_2 в S_1, будет вдвое интенсивнее, т. е. равным 2μ. Аналогично поток событий, переводящий систему из S_3 в S_2, будет равен 3μ.

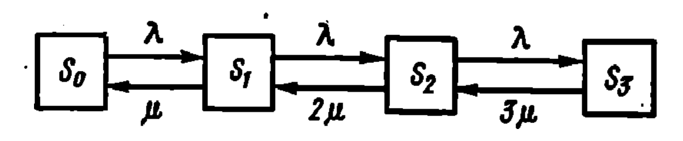


Рис. 7.4.1

Разметив граф состояний (рис. 7.4.1) и пользуясь общим правилом (раздел 7.1), составим уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0 + \mu p_1;\\ \frac{dp_1}{dt} &= -(\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0 + 2\mu p_2;\\ \frac{dp_2}{dt} &= -(\lambda + 2\mu)p_2 + \lambda p_1 + 3\mu p_3;\\ \frac{dp_3}{dt} &= -3\mu p_3 + \lambda p_2.\end{aligned}\right\} \qquad (7.4.1)$$

Начальные условия (при $t = 0$): $p_0 = 1$; $p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

Решение уравнений типа (7.4.1) обычно выполняется на ЭВМ. При этом будут получены вероятности состояний как функции времени. В большинстве случаев бывает достаточным знание предельных вероятностей состояний, характеризующих установившийся режим работы системы массового обслуживания (при $t \to \infty$). Для этого согласно правилу, изложенному в разделе 7.1, следует левые части уравнений (производные) положить равными нулю и решить полученную таким образом систему линейных алгебраических уравнений.

В табл. 7.4.1 приведены размеченные графы состояний некоторых типов систем массового обслуживания и предельные вероятности состояний этих систем [12]. Составление дифференциальных уравнений состояний системы при наличии размеченного графа см. в разделе 7.1.

Для оценки эффективности систем массового обслуживания (при $t \to \infty$) можно воспользоваться данными табл. 7.4.2, в которой для различных показателей эффективности даны расчетные формулы. Предельные вероятности состояний систем массового обслуживания, используемые в расчетных формулах табл. 7.4.2, находятся из соотношений (7.4.2)—(7.4.7) табл. 7.4.1.

Для краткости записи в табл. 7.4.1 и 7.4.2 обозначены: $\rho=\lambda/\mu$; $\varkappa=\rho/n$.

Пример 7.4.2. Вычислительная станция имеет три ЭВМ ($n=3$). Средняя интенсивность потока на выполнение расчетов — четыре заявки в час ($\lambda=4$). Среднее время решения одной задачи $\bar{t}_{об}=0{,}5$ ч. Станция принимает и ставит в очередь на решение не более $m=3$ заявок. Заявки, прибывшие, когда в очередь поставлено 3 заявки, не принимаются (получают отказ). Найти основные характеристики системы массового обслуживания: вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число занятых ЭВМ, среднее число заявок в очереди, среднее время ожидания и пребывания заявки на станции.

Решение. Имеем многоканальную систему массового обслуживания с ожиданием при ограниченном m числе мест в очереди.

Предварительно вычислим:

$$\mu=1/\bar{t}_{об}=1/0{,}5=2\ ч^{-1};\ \rho=\lambda/\mu=4/2=2;\ \varkappa=\rho/n=2/3.$$

Используя формулы (7.4.6), находим: вероятность того, что все ЭВМ свободны:

$$p_0=\cfrac{1}{1+\cfrac{\rho}{1!}+\cfrac{\rho^2}{2!}+\cfrac{\rho^3}{3!}+\cfrac{\rho^3}{3!}\cfrac{\cfrac{\rho}{n}-\left(\cfrac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\cfrac{\rho}{n}}}=$$

$$=\cfrac{1}{1+2+\cfrac{2^2}{2}+\cfrac{2^3}{2\cdot3}+\cfrac{2^3}{2\cdot3}\cfrac{\cfrac{2}{3}-\left(\cfrac{2}{3}\right)^4}{1-\cfrac{2}{3}}}=\frac{81}{665}=0{,}122,$$

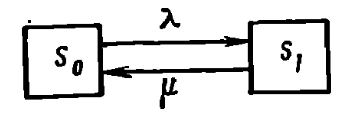
а также вероятность того, что все три ЭВМ заняты и три заявки стоят в очереди:

$$p_{m+n}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}p_0=p_6=\frac{2^6}{3^3\cdot1\cdot2\cdot3}\,\frac{81}{665}=\frac{32}{665}=0{,}048.$$

Последующие расчеты выполняем с помощью формул в табл. 7.4.2.

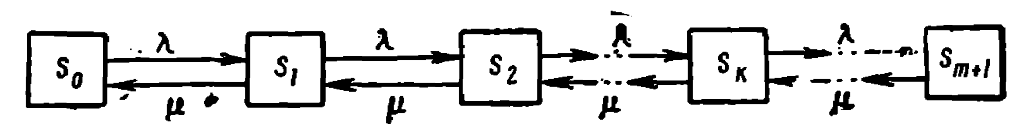
Таблица 7.4.1

Предельные вероятности состояний систем массового обслуживания

Состояние системы	Предельные вероятности состояний
Одноканальная с отказами	
	
S_0 — канал свободен; S_1 — канал занят	$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ (7.4.2)

Продолжение табл. 7.4.1

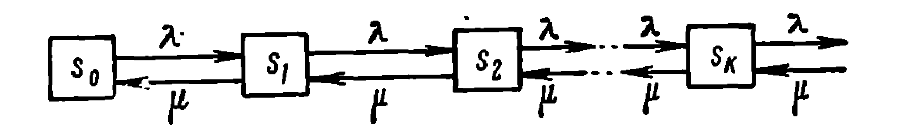
Состояние системы	Предельные вероятности состояний
Одноканальная с ожиданием при ограниченном числе мест m в очереди	



S_0 — канал свободен;	$p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$;
S_1 — канал занят, очереди нет;	$p_1 = \rho p_0$;
S_2 — канал занят, одна заявка в очереди;	$p_2 = \rho^2 p_0$;
. . . .	. . . . . .
S_k — канал занят, $k-1$ заявок в очереди;	$p_k = \rho^k p_0$;
. . . .	. . . . . .
S_{m+1} — канал занят, m заявок в очереди	$p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$ (7.4.3)

Продолжение табл. 7.4.1

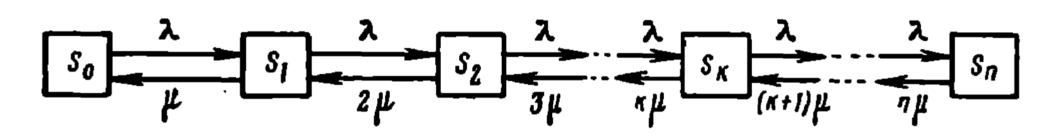
Состояние системы	Предельные вероятности состояний
Одноканальная с ожиданием при неограниченном числе мест *m* в очереди	



Состояние системы	Предельные вероятности состояний
S_0 — канал свободен;	$p_0 = 1 - \rho;$
S_1 — канал занят, очереди нет;	$p_1 = \rho(1-\rho);$
S_2 — канал занят, одна заявка в очереди;	$p_2 = \rho^2(1-\rho);$
. . . .	. . . .
S_k — канал занят, $k-1$ заявок в очереди;	$p_k = \rho^k(1-\rho)$
. . . .	. . . .

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 1-\rho; \\ p_1 &= \rho(1-\rho); \\ p_2 &= \rho^2(1-\rho); \\ &\ldots \\ p_k &= \rho^k(1-\rho) \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \quad (7.4.4)$$

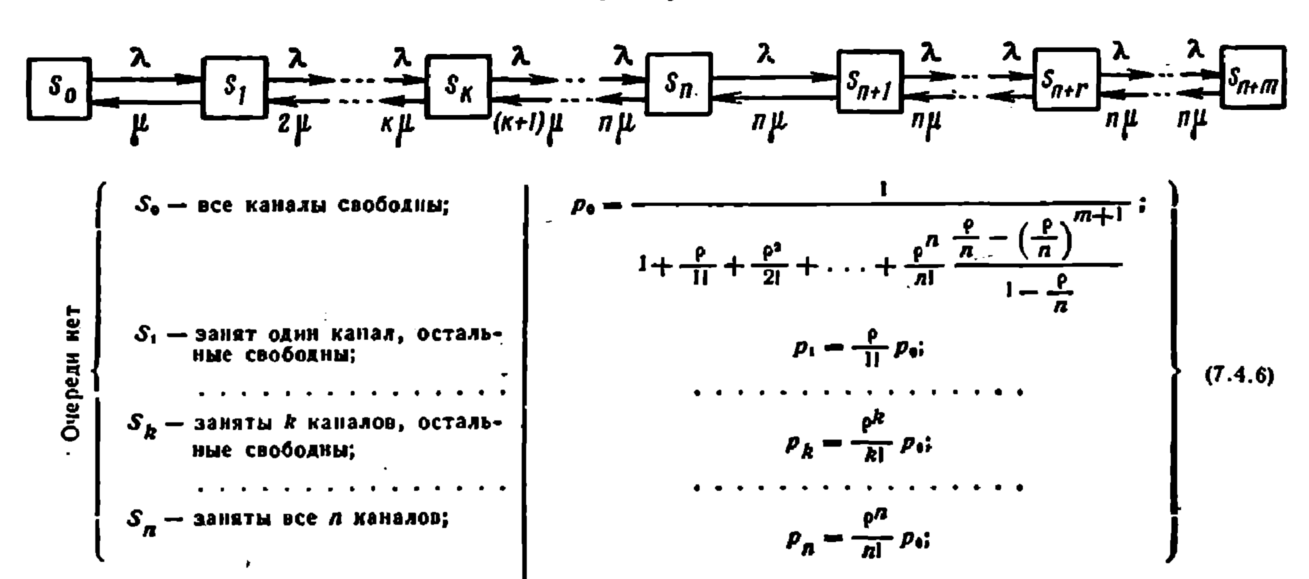
Продолжение табл. 7.4.1

Состояние системы	Предельные вероятности состояний
Многоканальная с отказами	
	
S_0 — все каналы свободны;	$p_0 = \dfrac{1}{1+\dfrac{\rho}{1!}+\dfrac{\rho^2}{2!}+\ldots+\dfrac{\rho^n}{n!}}$;
S_1 — занят ровно один канал, остальные свободны;	
. . . .	. . . .
S_k — занято ровно k каналов, остальные свободны;	$p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} p_0$;
. . . .	. . . .
S_n — заняты все n каналов	$p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0$ (7.4.5)

Продолжение табл. 7.4.1

Состояние системы	Предельные вероятности состояний

Многоканальная с ожиданием при ограниченном числе мест m в очереди



Очереди нет: S_0 — все каналы свободны;	$p_0 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\rho^n}{n!}\,\dfrac{\dfrac{\rho}{n} - \left(\dfrac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \dfrac{\rho}{n}}}$;
S_1 — занят один канал, остальные свободны;	$p_1 = \dfrac{\rho}{1!} p_0$;
. . . .	. . . .
S_k — заняты k каналов, остальные свободны;	$p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} p_0$;
. . . .	. . . .
S_n — заняты все n каналов;	$p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0$;

(7.4.6)

Продолжение табл. 7.4.1

Состояние системы	Предельные вероятности состояний
S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка в очереди;	$p_{n+1} = \frac{\rho^n}{nn!} p_0;$
. . . .	. . . .
S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок в очереди;	$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!} p_0;$ (7.4.6)
. . . .	. . . .
S_{n+m} — заняты все n каналов, m заявок в очереди	$p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$

Многоканальная с ожиданием при неограниченном числе мест m в очереди

Состояние системы	Предельные вероятности состояний
Очереди нет: S_0 — все каналы свободны;	$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}};$ (7.4.7)

	Состояние системы
Очереди нет	S_1 — занят один канал, остальные свободны;
	. . . .
	S_k — заняты k каналов, остальные свободны;
	. . . .
	S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка в очереди;
	. . . .
	S_{n+r} — заняты все каналы, r заявок в очереди

Предельные вероятности состояний
$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\rho}{1!}\, p_0; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_k &= \frac{\rho^k}{n!}\, p_0; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_{n+1} &= \frac{\rho^{n+1}}{n\, n!}\, p_0; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_{n+r} &= \frac{\rho^{n+r}}{n^r\, n!}\, p_0 \end{aligned}\right\} \quad (7.4.7)$$

Формулы для оценки эффективности

(при

Показатель эффективности	Система		
	одноканальная		
	с отказами	с ожиданием при ограниченном m	с ожиданием при неограниченном m
Относительная пропускная способность	$q = p_0$	$q = 1 - p_{m+1}$	$q = 1$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda q$	$A = \lambda q$	$A = \lambda$
Вероятность отказа	$P_{отк} = 1 - q$	$P_{отк} = p_{m+1}$	$P_{отк} = 0$
Среднее число заявок, находящихся в очереди	—	$\bar{r} = \frac{\rho^2[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$	$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
Среднее число занятых каналов	—	—	—
Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием		$\bar{\omega} = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}}$	—
Среднее число заявок, находящихся в системе		$k = \bar{r} + \bar{\omega}$	$k = \bar{r} + \rho$
Среднее время ожидания заявки в очереди		$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^2}{\mu(1-\rho)}$	$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе		$\bar{t}_{сист} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$	$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \frac{q}{\mu}$

Таблица 7.4.2

системы массового обслуживания

$t\to\infty$)

массового обслуживания			
	многоканальная		
	с отказами	с ожиданием при ограниченном m	с ожиданием при неограниченном m
	$q=1-p_n$	$q=1-p_{n+m}$	$q=1$
	$A=\lambda q$	$A=\lambda q$	$A=\lambda$
	$P_{\text{отк}}=p_n$	$P_{\text{отк}}=p_{n+m}$	$P_{\text{отк}}=0$
	—	$\bar r=\frac{\rho^{n+1}p_0}{nn!}\times\frac{1-(m+1)\varkappa+m\varkappa}{(1-\varkappa)^2}$	$\bar r=\frac{\rho^{n+1}p_0}{nn!\,(1-\varkappa)^2}$
	$\bar k=\frac{A}{\mu}$	$\bar z=\frac{A}{\mu}$	$\bar z=\rho$
	—	—	—
		$k=\bar r+\bar z$	$k=\bar r+\bar z$
		$\bar t_{\text{ож}}=\frac{\bar r}{\lambda}$	$\bar t_{\text{ож}}=\frac{\rho^n p_0}{n\mu n!\,(1-\varkappa)^2}$
		$\bar t_{\text{сист}}=\bar t_{\text{ож}}+\frac{q}{\mu}$	

Относительная пропускная способность: $q = 1 - p_{m+n} = 1 - p_4 = 1 - 0{,}048 = 0{,}952$.

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda q = 4 \cdot 0{,}952 = 3{,}808$ заявок в час.

Вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = p_{n+m} = p_4 = 0{,}048$.

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$\bar r = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n n!} \frac{1 - (m+1)\varkappa + m\varkappa}{(1-\varkappa)^2} =$$

$$= \frac{2^4 \cdot 81}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 665} \frac{1 - 4\frac{2}{3} + 3\frac{2}{3}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{216}{665} = 0{,}325.$$

Среднее число занятых ЭВМ: $\bar z = A/\mu = 3{,}808/2 = 1{,}904$.

Среднее число заявок, находящихся в вычислительной станции: $k = \bar r + \bar z = 0{,}325 + 1{,}904 = 2{,}229$.

Среднее время ожидания заявки в очереди: $\bar t_{\text{ож}} = \bar r/\lambda = 216/665 \cdot 4 = 0{,}081$ ч.

Среднее время пребывания заявки в вычислительной станции: $\bar t_{\text{сист}} = \bar t_{\text{ож}} + q/\mu = 0{,}081 + 0{,}952/2 = 0{,}557$ ч.

7.5. МЕТОДЫ УЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

7.5.1. Общие положения

В общем случае любая техническая система состоит из элементов (узлов). Надежность системы зависит от надежности ее элементов и от того, каким образом элементы объединены в систему и какова функция каждого из них. Надежность системы (элемента) — это вероятность того, что система (элемент) сохранит работоспособность по крайней мере на протяжении заданного промежутка времени при использовании ее в определенных условиях.

В зависимости от того, каким образом элементы объединены в систему и как они в ней функционируют, могут быть два типа систем: *простая система* (или система без резервирования), т. е. такая техническая система, отказ любого элемента которой равносилен отказу системы в целом, и *резервированная система*, т. е. система, в которой применяется дублирование (резерв) элементов, чем достигается повышение надежности системы. В зависимости от

того, когда включается в работу дублирующий элемент, различают «горячее», «холодное» и «облегченное» резервирование.

«Горячее» резервирование — такое, когда дублирующий элемент независимо от того, работает он или нет, держится под рабочим напряжением. При отказе основного элемента система автоматически переключается на резервный элемент. Считается, что надежность каждого дублирующего элемента не зависит от того, когда он включился в работу.

«Холодное» резервирование отличается тем, что резервный элемент до своего включения в работу вообще не может отказывать.

«Облегченное» резервирование — такое, когда до включения в работу элемент может отказывать, но с меньшей плотностью вероятности, чем после включения.

В общем случае закон надежности, т. е. вероятность того, что элемент в данных условиях будет работать безотказно в течение времени t, выражается формулой

$$p(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right]. \qquad (7.5.1)$$

где $\lambda(t)$ — интенсивность отказов, т. е. среднее число отказов в единицу времени, приходящихся на один работающий элемент.

В частном случае, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, закон надежности будет экспоненциальный

$$p(t) = e^{-\lambda t}. \qquad (7.5.2)$$

Функция распределения времени безотказной работы элемента при экспоненциальном законе надежности имеет вид

$$F(t) = q(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad (7.5.3)$$

а плотность

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ (t > 0). \qquad (7.5.4)$$

Среднее время безотказной работы элемента будет

$$\bar{t} = \int_0^\infty t f(t)\, dt = \int_0^\infty p(t)\, dt. \qquad (7.5.5)$$

При экспоненциальном законе надежности среднее время безотказной работы равно

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (7.5.6)$$

На практике экспоненциальный закон надежности встречается, когда элементы эксплуатируются после окончания периода приработки.

7.5.2. Надежность нерезервированной системы

Нерезервированная (простая) система S может быть условно представлена схемой последовательно соединенных n элементов $Э_1$, $Э_2$, ..., $Э_n$ (рис. 7.5.1).

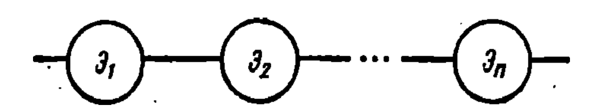


Рис. 7.5.1

Если элементы отказывают независимо друг от друга, то надежность такой системы определяется по формуле

$$P = p_1 p_2 \ldots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i. \qquad (7.5.7)$$

где p_i — надежность i-го элемента системы.

В частном случае, когда все элементы обладают одинаковой надежностью $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, надежность системы будет равна

$$P = p^n. \qquad (7.5.8)$$

Интенсивность отказов нерезервированной системы $\Lambda(t)$ равна сумме интенсивностей отказов всех ее элементов $\lambda_i(t)$:

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t). \qquad (7.5.9)$$

Пример 7.5.1 Простая система состоит из трех независимых элементов, надежности которых $p_1 = 0{,}98$; $p_2 = 0{,}95$ и $p_3 = 0{,}94$. Определить надежность системы.

Решение. Согласно (7.5.7) получим: $P = p_1 p_2 p_3 = 0{,}98 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}94 = 0{,}88$.

Пример 7.5.2. Простая система состоит из трех независимых элементов, интенсивности отказов которых $\lambda_1 = 0{,}8$ ч$^{-1}$, $\lambda_2 = 0{,}5$ ч$^{-1}$ и $\lambda_3 = 1{,}25$ ч$^{-1}$.

Найти среднее время безотказной работы каждого элемента и системы в целом.

Решение. Согласно (7.5.6) среднее время безотказной работы каждого из элементов будет:

$\bar{t}_1 = 1/\lambda_1 = 1/0{,}8 = 1{,}25$ ч; $\bar{t}_2 = 1/\lambda_2 = 1/0{,}5 = 2$ ч;

$\bar{t}_3 = 1/\lambda_3 = 1/1{,}25 = 0{,}8$ ч.

По (7.5.9) интенсивности отказов системы

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0{,}8 + 0{,}5 + 1{,}25 = 2{,}55 \text{ ч}^{-1}.$$

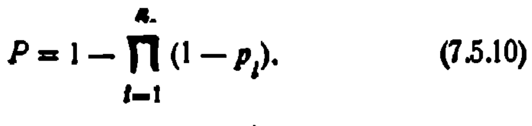
Среднее время безотказной работы системы

$\bar{t}_{\text{сист}} = 1/\Lambda = 1/2{,}55 = 0{,}39$ ч.

7.5.3. Надежность резервированной системы («горячий» резерв)

Резервированная система может быть условно представлена схемой параллельно соединенных n элементов $Э_1$, $Э_2$, ..., $Э_n$ (рис. 7.5.2). Если отказал основной элемент $Э_1$, система автоматически переключается на резервный $Э_2$ и т. д.

При независимых отказах элементов надежность системы за некоторое время t определяется по формуле



$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i). \qquad (7.5.10)$$

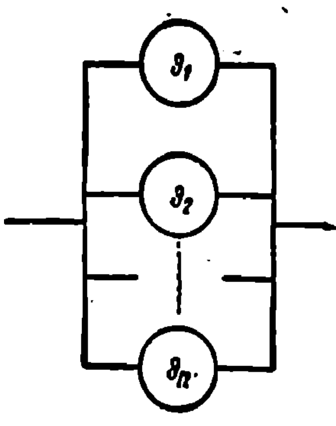


Рис. 7.5.2

В частном случае, когда надежности всех элементов одинаковы, надежность системы находится по формуле

$$P = 1 - (1 - p)^n. \qquad (7.5.11)$$

В общем случае в резервированной системе наряду с параллельными могут быть и последовательные соединения элементов. Для оценки надежности такой системы следует условно расчленить ее на ряд узлов, содержащих только параллельные или только последовательные соединения. Затем условно выделить подсистемы, в которых узлы соединены последовательно или параллельно. Для каждого из узлов, а затем и подсистем найти надежность по соответствующим формулам в зависимости от порядка соединения элементов в узлах и узлов в подсистемах. Надежность системы определить в зависимости от соединения подсистем.

Пример 7.5.3. Система S состоит из 9 элементов $Э_1$, $Э_2$, ..., $Э_9$, соединенных, как показано на рис. 7.5.3. Надежности элементов p_1, p_2, ..., p_9. Найти надежность системы S.

Решение. Условно выделяем узлы с последовательным соединением элементов. Такими будут II, IV, V узлы. Для них по формуле (7.5.7) находим надежности: $P_{II} = p_4p_5$; $P_{IV} = p_6p_7$; $P_V = p_8p_9$.

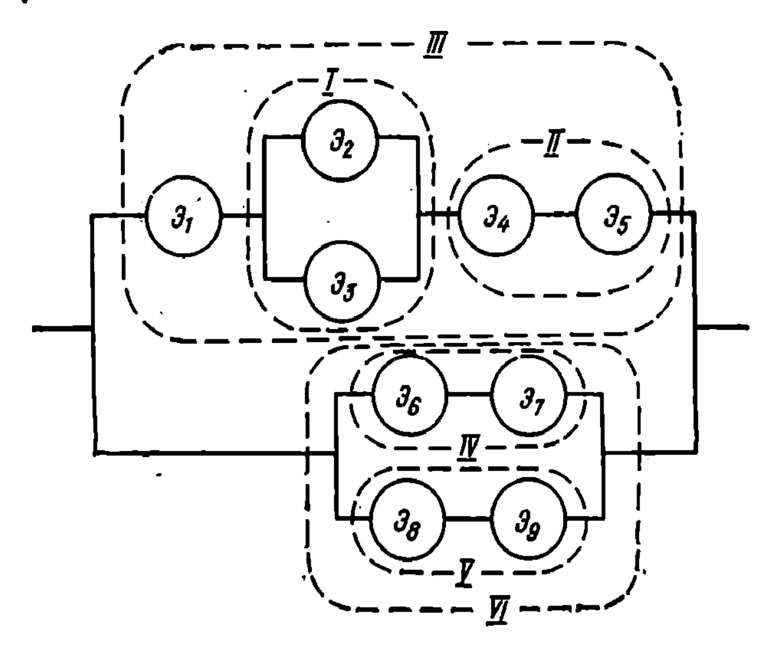


Рис. 7.5.3

Узел I с параллельным соединением элементов $Э_2$ и $Э_3$ согласно формуле (7.5.10) имеет надежность: $P_I = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3)$.

Подсистема III с последовательным соединением элемента $Э_1$ и узлов I, II обладает надежностью: $P_{III} = p_1P_IP_{II}$.

Подсистема VI с параллельным соединением узлов IV и V имеет надежность: $P_{VI} = 1 - (1 - P_{IV})(1 - P_V)$.

Система S из параллельно соединенных узлов III и VI имеет надежность: $P = 1 - (1 - P_{III})(1 - P_{VI})$.

7.5.4. Надежность системы с «холодным» и «облегченным» резервированием

При «холодном» резерве интенсивность потока отказов первоначально действует на основной элемент системы. Каждый из резервных элементов до включения его в ра-

боту отказать не может. Интенсивность потока отказов на резервный элемент начинает действовать с момента включения его в работу.

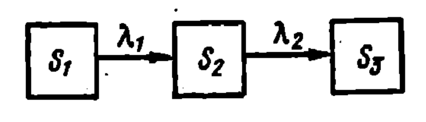


Рис. 7.5.4

При «облегченном» резерве интенсивность потока отказов на каждый из резервных элементов действует как до включения, так и после включения его в работу. Однако интенсивность потока отказов до включения элемента в работу меньше, чем после включения его в работу.

Для оценки надежности системы с «холодным» или «облегченным» резервированием необходимо анализировать весь случайный процесс функционирования системы.

Если сделать допущение, что потоки неисправностей, действующие на элементы, являются простейшими (закон надежности каждого элемента — экспоненциальный), то надежность системы может быть найдена решением дифференциальных уравнений для вероятностей ее состояний. При сделанном допущении случайный процесс, протекающий в системе, является марковским и составление уравнений для вероятностей состояний производится по правилам раздела 7.1.

Пример 7.5.4 (система с «холодным» резервом). Резервированная система состоит из двух элементов — основного и резервного. До включения в работу резервный элемент находится в холодном состоянии (не может отказать). Интенсивность потока отказов основного элемента λ_1, резервного — λ_2. Интенсивности потока отказов простейшие (без последствия). Составить дифференциальные уравнения вероятностей состояний системы.

Решение. Процесс, протекающий в системе, является марковским. Составляем граф состояний системы (рис. 7.5.4). Система может находиться в состояниях:

S_1 — работает основной элемент;

S_2 — основной элемент отказал, работает резервный;

S_3 — отказали оба элемента.

Интенсивность потока событий (отказов), переводящих систему из состояния S_1 в состояние S_2, равна λ_1. Система переводится из состояния S_2 в S_3 с интенсивностью потока событий λ_2.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний, составленная по правилам раздела 7.1, будет:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\lambda_1 p_1; \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_1; \\ \frac{dp_3}{dt} &= \lambda_2 p_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7.5.12)$$

Нормировочное условие: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Решение системы дифференциальных уравнений (7.5.12) дает:

$$p_1(t) = e^{-\lambda_1 t};$$

$$p_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right);$$

$$p_3(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}.$$

Надежность системы $P(t)$ равна сумме вероятностей состояний, при которых система работает: $P(t) = p_1(t) + p_2(t)$, или $P(t) = 1 - p_3(t)$.

Пример 7.5.6 (система с «облегченным» резервом). Резервированная система S состоит из основного и трех резервных элементов. Основной элемент подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ_1. Каждый из резервных элементов до его включения подвергается потоку отказов с интенсивностью λ_2. После включения резервного элемента интенсивность отказов мгновенно подскакивает до значения λ_1. При отказе основного элемента включается в работу первый резервный, а при отказе его — второй и т. д. Определить надежность системы.

Решение. Система может находиться в состояниях:

S_{13} — основной элемент работает, все три резервных исправны;
S_{12} — основной элемент работает, из трех резервных один отказал, два исправны;
S_{11} — основной элемент работает, из трех резервных два отказали, один исправен;
S_{10} — основной элемент работает, все три резервных отказали;
S_{03} — основной элемент отказал, работает один из резервных, остальные два исправны;
S_{02} — основной элемент отказал, работает один из резервных, из остальных резервных один исправен, другой отказал;
S_{01} — основной элемент отказал, работает один из резервных, остальные два отказали;
S_{00} — все элементы отказали.

Размеченный граф состояний системы показан на рис. 7.5.5.

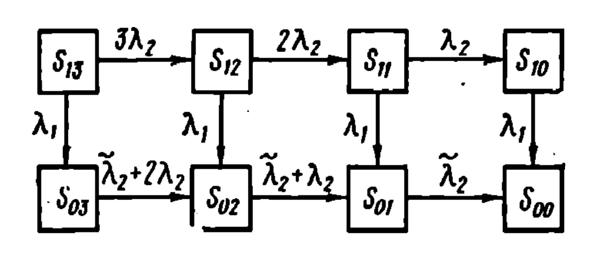


Рис. 7.5.5

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний будет:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_{13}}{dt} &= -(3\lambda_2+\lambda_1)\,p_{13};\\
\frac{dp_{12}}{dt} &= -(2\lambda_2+\lambda_1)\,p_{12}+3\lambda_2 p_{13};\\
\frac{dp_{11}}{dt} &= -(\lambda_2+\lambda_1)\,p_{11}+2\lambda_2 p_{12};\\
\frac{dp_{10}}{dt} &= -\lambda_1 p_{10}+\lambda_2 p_{11};\\
\frac{dp_{03}}{dt} &= -\left(\tilde{\lambda}_2+2\lambda_2\right) p_{03}+\lambda_1 p_{13};\\
\frac{dp_{02}}{dt} &= -\left(\tilde{\lambda}_2+\lambda_2\right) p_{02}+\lambda_1 p_{12}+\left(\tilde{\lambda}_2+2\lambda_2\right) p_{03};\\
\frac{dp_{01}}{dt} &= -\tilde{\lambda}_2 p_{01}+\lambda_1 p_{11}+\left(\tilde{\lambda}_2+\lambda_2\right) p_{02};\\
\frac{dp_{00}}{dt} &= \lambda_1 p_{10}+\tilde{\lambda}_2 p_{01}.
\end{aligned}\right\}\quad (7.5.13)$$

Нормировочное условие: $p_{13}+p_{12}+p_{11}+p_{10}+p_{03}+p_{02}+p_{01}+$ $+p_{00}=1$.

Интегрирование системы 7.5.13 даст значения $p_{13}(t)$, $p_{12}(t)$, $\ldots$, $p_{00}(t)$.

Надежность системы будет равна $P(t)=1-p_{00}(t)$.

7.5.5. Надежность системы с восстановлением

Под системой с восстановлением понимается такая, в которой отказавшие элементы восстанавливаются — мгновенно заменяются новыми или ремонтируются. При допущении, что потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, — простейшие, случайные процессы, протекающие в системе, будут марковскими с непрерывным временем и дискретными состояниями. В этом случае составление дифференциальных уравнений состояний системы производится по правилам раздела 7.1.

Многообразие условий задач надежности не позволяет дать готовые их решения. Приведем лишь некоторые простейшие решения.

а) **Задача о запасных элементах.** Работает простая система, состоящая из одного элемента, который подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ. При отказе элемент немедленно заменяется новым с такими же характеристиками. Запасные элементы в количестве N находятся в «холодном» резерве.

Надежность $P(t)$ системы с восстановлением, т. е. вероятность того, что запасных элементов хватит для обеспечения работы системы в течение времени t, находится по формуле

$$P(t) = e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{N} \frac{(\lambda t)^m}{m!}. \tag{7.5.14}$$

б) **Задача об одном элементе с задержанным восстановлением.** Система состоит из одного элемента, находящегося под действием простейшего потока отказов с интенсивностью λ. Отказавший элемент немедленно ремонтируется с интенсивностью простейшего потока восстановлений μ. Запас средств для ремонта неограничен. На период восстановления элемента система выключается.

Надежность $P(t)$ системы, т. е. вероятность того, что в момент t она будет работать:

$$P(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu) t}. \tag{7.5.15}$$

При $t \to \infty$, т. е. для установившегося режима, надежность определяется по формуле

$$p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (7.5.16)$$

Вероятность $\tilde{P}(t)$ того, что до момента t не произойдет ни одного отказа, находится по формуле

$$\tilde{P}(t) = e^{-\lambda t}. \quad (7.5.17)$$

в) Задача о нескольких элементах с задержанным восстановлением и выключением системы. Система состоит из n элементов, каждый из которых находится под действием простейшего потока отказов с интенсивностью λ.

При отказе любого элемента система выключается и начинается восстановление элемента. Интенсивность потока восстановлений равна μ. Все потоки простейшие. При неработающей системе элементы отказывать не могут.

Надежность системы находится по формулам:

$$P(t) = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} + \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda+\mu)t}; \quad (7.5.18)$$

$$p = \frac{\mu}{n\lambda + \mu}. \quad (7.5.19)$$

Вероятность $\tilde{P}(t)$ того, что до момента t не произойдет ни одного отказа, находится по формуле

$$\tilde{P}(t) = e^{-n\lambda t}. \quad (7.5.20)$$

г) Задача о нескольких элементах с задержанным восстановлением без выключения системы. Условия аналогичны предыдущему случаю, но исправные элементы продолжают работать. Интенсивность потока восстановлений не зависит от числа одновременно восстанавливаемых элементов.

Система может находиться в состояниях:

S_0 — все элементы исправны;

S_1 — один элемент восстанавливается, остальные исправны;

. . . .

S_k — k элементов восстанавливается, остальные исправны;

S_n — все n элементов восстанавливаются.

Размеченный граф состояний системы показан на рис. 7.5.6.

Рис. 7.5.6

Дифференциальные уравнения для вероятностей состояний имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0}{dt} = -n\lambda p_0 + \mu p_1;\\
&\frac{dp_1}{dt} = -[(n-1)\lambda + \mu]p_1 + n\lambda p_0 + 2\mu p_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dp_k}{dt} = -[(n-k)\lambda + k\mu]\,p_k +\\
&+(n-k+1)\,\lambda p_{k-1} + (k+1)\,\mu p_{k+1};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dp_n}{dt} = -n\mu p_n + \lambda p_{n-1}.
\end{aligned}\right\}\quad(7.5.21)$$

Нормировочное условие: $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.

Предельные вероятности состояний будут:

$$\left.\begin{aligned}
&p_0 = \frac{1}{(1+\rho)^n};\\
&p_r = C_n^r\,\rho^r p_0;\ (r = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\}\quad(7.5.22)$$

где

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Таким образом, исследование надежности технических систем при определенных условиях (потоки событий, переводящих элементы из состояния в состояние,— пуассоновские) может выполняться методами теории непрерывных марковских цепей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ t_α ДЛЯ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА $-t_\alpha < t < t_\alpha$, ГДЕ ВЕЛИЧИНА t ИМЕЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ α И ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ k

k	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,2$	$\alpha=0,3$	$\alpha=0,4$	$\alpha=0,5$	$\alpha=0,6$	$\alpha=0,7$	$\alpha=0,8$	$\alpha=0,9$	$\alpha=0,95$	$\alpha=0,98$	$\alpha=0,99$	$\alpha=0,999$
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,391	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073

Продолжение табл. 1

k	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,2$	$\alpha=0,3$	$\alpha=0,4$	$\alpha=0,5$	$\alpha=0,6$	$\alpha=0,7$	$\alpha=0,8$	$\alpha=0,9$	$\alpha=0,95$	$\alpha=0,98$	$\alpha=0,99$	$\alpha=0,999$
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,108	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Таблица 2

ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОШИБКА В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧЕСКОМ ОТКЛОНЕНИИ НЕ ПРЕВЗОЙДЕТ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ q

$$P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right)$$

k	$q=0{,}001$	$q=0{,}005$	$q=0{,}01$	$q=0{,}02$	$q=0{,}04$	$q=0{,}06$	$q=0{,}08$	$q=0{,}10$	$q=0{,}20$	$q=0{,}30$	$q=0{,}40$	$q=0{,}50$
1	0,001	0,005	0,010	0,019	0,039	0,058	0,077	0,097	0,193	0,289	0,379	0,458
2	0,001	0,007	0,015	0,029	0,059	0,088	0,118	0,147	0,290	0,423	0,538	0,623
3	0,002	0,009	0,019	0,037	0,074	0,111	0,147	0,184	0,359	0,515	0,636	0,714
4	0,002	0,011	0,022	0,043	0,086	0,129	0,172	0,214	0,414	0,583	0,703	0,774
5	0,002	0,012	0,024	0,049	0,097	0,146	0,194	0,241	0,461	0,637	0,752	0,816
6	0,003	0,013	0,027	0,054	0,107	0,160	0,213	0,264	0,501	0,681	0,791	0,849
7	0,003	0,015	0,029	0,058	0,116	0,174	0,230	0,286	0,536	0,717	0,821	0,874
8	0,003	0,016	0,031	0,062	0,125	0,186	0,246	0,305	0,567	0,748	0,845	0,895
9	0,003	0,017	0,033	0,066	0,132	0,197	0,261	0,323	0,595	0,774	0,865	0,911
10	0,004	0,018	0,035	0,070	0,140	0,208	0,275	0,340	0,620	0,797	0,882	0,925
12	0,004	0,019	0,039	0,077	0,155	0,228	0,301	0,371	0,664	0,833	0,909	0,946
14	0,004	0,021	0,042	0,083	0,166	0,246	0,325	0,399	0,701	0,862	0,929	0,960
16	0,004	0,022	0,045	0,089	0,177	0,263	0,346	0,425	0,733	0,885	0,944	0,971
18	0,005	0,024	0,047	0,095	0,188	0,279	0,366	0,448	0,760	0,903	0,955	0,980
20	0,005	0,025	0,050	0,100	0,198	0,293	0,384	0,470	0,784	0,918	0,964	0,984

Продолжение табл. 2

k	q=0,001	q=0,005	q=0,01	q=0,02	q=0,04	q=0,06	q=0,08	q=0,10	q=0,20	q=0,30	q=0,40	q=0,50
25	0,006	0,028	0,056	0,112	0,221	0,327	0,426	0,518	0,832	0,944	0,979	0,992
30	0,006	0,031	0,061	0,122	0,242	0,356	0,462	0,559	0,867	0,962	0,988	0,996
35	0,007	0,033	0,067	0,133	0,262	0,384	0,497	0,597	0,893	0,969	0,990	0,997
40	0,007	0,036	0,072	0,142	0,279	0,408	0,525	0,628	0,913	0,978	0,994	0,999
45	0,008	0,038	0,076	0,150	0,295	0,431	0,552	0,657	0,929	0,984	0,996	0,999
50	0,008	0,040	0,080	0,158	0,303	0,452	0,576	0,682	0,942	0,988	0,998	0,999
60	0,009	0,044	0,087	0,173	0,339	0,489	0,619	0,726	0,960	0,993	0,999	1,000
70	0,009	0,047	0,094	0,187	0,364	0,522	0,656	0,762	0,972	0,996	1,000	
80	0,010	0,050	0,101	0,200	0,387	0,552	0,688	0,792	0,980	0,998		
90	0,011	0,053	0,107	0,211	0,408	0,579	0,716	0,818	0,986	0,999		
100	0,011	0,056	0,112	0,222	0,428	0,604	0,741	0,840	0,990	0,999		
150	0,014	0,069	0,137	0,271	0,500	0,701	0,833	0,914	0,998	1,000		
200	0,016	0,080	0,158	0,311	0,576	0,769	0,888	0,951	1,000			
250	0,018	0,089	0,177	0,345	0,629	0,815	0,924	0,972	1,000			
500	0,025	0,126	0,248	0,473	0,794	0,941	0,987	0,998	1,000			
1000	0,036	0,177	0,345	0,629	0,926	0,992	0,999	1,000	1,000			

Продолжение табл. 2

k	$q=0,60$	$q=0,70$	$q=0,80$	$q=0,90$	$q=1,00$	$q=1,50$	$q=2,00$	$q=3,00$	$q=4,00$	$q=5,00$	$q=6,00$	$q=7,00$
1	0,520	0,556	0,579	0,599	0,617	0,689	0,739	0,803	0,841	0,868	0,888	0,901
2	0,675	0,707	0,734	0,759	0,779	0,852	0,895	0,942	0,962	0,974	0,981	0,985
3	0,759	0,792	0,819	0,842	0,861	0,923	0,953	0,980	0,989	0,994	0,996	0,997
4	0,815	0,847	0,872	0,893	0,910	0,959	0,979	0,993	0,997	0,999	1,000	1,000
5	0,856	0,885	0,908	0,926	0,940	0,977	0,990	0,998	0,999	1,000		
6	0,886	0,913	0,933	0,948	0,959	0,987	0,995	0,999	1,000			
7	0,908	0,932	0,950	0,963	0,972	0,993	0,998	1,000				
8	0,926	0,948	0,963	0,974	0,981	0,996	0,999					
9	0,940	0,960	0,972	0,981	0,987	0,998	0,999					
10	0,951	0,968	0,979	0,986	0,991	0,999	1,000					
20	0,993	0,997	0,999	0,999	1,000							
30	0,999	1,000										
40	1,000											

Таблица 3

НИЖНЯЯ γ_1 И ВЕРХНЯЯ γ_2 ГРАНИЦЫ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ σ

$$\gamma_1 \tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2 \tilde{\sigma}, \left(\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ α И ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ k

k	$\alpha=0,99$		$\alpha=0,98$		$\alpha=0,95$		$\alpha=0,90$	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	159	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	5,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358

Продолжение табл. 8

k	α=0,99		α=0,98		α=0,95		α=0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
120	0,867	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Таблица 4

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ χ^2

$$P\left(\chi^2 > \chi_q^2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} \int_{\chi_q^2}^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

χ_q^2	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	0,1574	0,3679	0,5724	0,7358	0,8491	0,9197	0,9598	0,9810
3	0,0833	0,2231	0,3916	0,5578	0,7000	0,8088	0,8850	0,9344
4	0,0455	0,1353	0,2615	0,4060	0,5494	0,6767	0,7798	0,8571
5	0,0254	0,0821	0,1718	0,2873	0,4159	0,5438	0,6600	0,7576
6	0,0143	0,0498	0,1116	0,1991	0,3062	0,4232	0,5398	0,6472
7	0,0081	0,0302	0,0719	0,1359	0,2206	0,3208	0,4289	0,5366
8	0,0047	0,0183	0,0460	0,0916	0,1562	0,2381	0,3326	0,4335
9	0,0027	0,0111	0,0293	0,0611	0,1091	0,1736	0,2527	0,3423
10	0,0016	0,0067	0,0186	0,0404	0,0752	0,1247	0,1886	0,2650

χ_q^2	$k=1$	$k=2$	$k=3$
11	0,0009	0,0041	0,0117
12	0,0005	0,0025	0,0074
13	0,0003	0,0015	0,0046
14	0,0002	0,0009	0,0029
15	0,0001	0,0006	0,0018
16	0,0001	0,0003	0,0011
17	0,0000	0,0002	0,0007
18		0,0001	0,0004
19		0,0001	0,0003
20		0,0000	0,0002
21			0,0001
22			0,0001
23			0,0000
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			

Продолжение табл. 4

k=4	k=5	k=6	k=7	k=8
0,0266	0,0514	0,0884	0,1386	0,2017
0,0174	0,0348	0,0620	0,1006	0,1512
0,0113	0,0234	0,0430	0,0721	0,1119
0,0073	0,0146	0,0296	0,0512	0,0818
0,0047	0,0104	0,0203	0,0360	0,0591
0,0030	0,0068	0,0138	0,0251	0,0424
0,0019	0,0045	0,0093	0,0174	0,0301
0,0012	0,0029	0,0062	0,0120	0,0212
0,0008	0,0019	0,0042	0,0082	0,0149
0,0005	0,0013	0,0028	0,0056	0,0103
0,0003	0,0008	0,0018	0,0038	0,0071
0,0002	0,0005	0,0012	0,0025	0,0049
0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0034
0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0023
0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016
0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010
	0,0001	0,0001	0,0003	0,0007
	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005
		0,0001	0,0001	0,0003
		0,0000	0,0001	0,0002

ЛИТЕРАТУРА

1. Абезгауз Г. Г., Тронь А. П., Копенкин Ю. Н., Коровина И. А. Справочник по вероятностным расчетам. М., Военииздат, 1970.
2. Абчук В. А., Емельянов Л. А., Матвейчук Ф. А., Суздаль В. Г. Введение в теорию выработки решений. М., Воениздат, 1972.
3. Акофф Р. Планирование в больших экономических системах. М., «Сов. радио», 1972.
4. Анфреев И., Татарченко А. Применение математических методов в военном деле. М., Воениздат, 1967.
5. Беллман Р. и Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., «Наука», 1965.
6. Бродский А. Д., Кан В. Л. Краткий справочник по математической обработке результатов измерений. М., Изд. стандартов, 1960.
7. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. М., «Наука», 1968.
8. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов. М., «Наука», 1964.
9. Бусленко Н. П., Голенко Д. И. и др. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1962.
10. Вальд А. Последовательный анализ. М., Физматгиз, 1960.
11. Вайда С. Теория игр и линейное программирование. В сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». М., Изд-во иностр. лит., 1959.
12. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., «Сов. радио», 1972.
13. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. М., «Сов. радио», 1964.
14. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
15. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. М., «Наука», 1973.
16. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М., «Наука», 1965.
17. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я. и др. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. Л., Судпромгиз, 1962.
18. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966.
19. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на ЭВМ. М., «Наука», 1965.
20. Гурин Л. С., Дымарский Я. С., Меркулов А. Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. М., «Сов. радио», 1968.
21. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.

22. Динер И. Я. О некоторых направлениях развития исследования операций. «Морской сборник», 1970, № 1.
23. Динер И. Я. Исследование операций. ВМОЛУА, 1969.
24. Дружинин В. В., Конторов Д. С. Идея, алгоритм, решение. М., Воениздат, 1972.
25. Дуров В. Р. Боевое применение и боевая эффективность истребителей-перехватчиков. М., Воениздат, 1972.
26. Емельянов Л. А., Абчук В. А., Лапшин В. П., Суздаль В. Г. Теория поиска в военном деле. М., Воениздат, 1964.
27. Зайденман И. А., Маргулис Д. Д. Математика в сетевом планировании. М., «Знание», 1967.
28. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1964.
29. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
30. Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. М., «Мир», 1966.
31. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. М., «Знание», 1968.
32. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Л., Изд. АН СССР, 1933.
33. Лефевр В. А., Смолян Г. Л. Алгебра конфликта. М., «Знание», 1968.
34. Кульбак С. Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967.
35. Лоули Д., Максвелл А. Факторный анализ как статистический метод. М., «Мир», 1967.
36. Мак-Кинси Д. Введение в теорию игр. М., Физматгиз, 1960.
37. Мангейм М. Л. Иерархические структуры. М., «Мир», 1970.
38. Нейман Д., Моргенштерн Ф. Теория игр и экономическое поведение. М., «Мир», 1970.
39. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., «Машиностроение», 1969.
40. Райвет П., Акофф Р. Исследование операций. М., «Мир», 1966.
41. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания. М., «Сов. радио», 1962.
42. Саати Т. Математические методы исследования операций. М., Воениздат, 1963.
43. Скугарев В. Д., Кудин Л. В. Сетевое планирование на флоте. М., Воениздат, 1973.
44. Скворцов М. И., Юхов В. И., Землянов Б. И., Абчук В. А., Мрыкин О. А. Основы маневрирования кораблей. М., Воениздат, 1966.
45. Тараканов К. В. Математика и вооруженная борьба. М., Воениздат, 1974.
46. Татарченко П. Н., Кунцев Л. Н., Мещеряков Г. А. и др. Математические модели боевых действий. М., «Сов. радио», 1969.
47. Чуев Ю. В., Мельников П. М., Петухов С. М. и др. Основы исследования операций в военной технике. М., «Сов. радио», 1965.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Стр.

Владимир Авраамович Абчук,
Федор Акимович Матвейчук,
Лев Петрович Томашевский.

СПРАВОЧНИК ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

Редактор *А. В. Федоров*
Художник переплета *В. А. Шорц*
Технический редактор *Е. Н. Слепцова*
Корректор *А. М. Дмитриева*
ИБ № 309
Сдано в набор 10.1.77 г. Подписано в печать 29.11.78 г. Г-12214,
Формат 70×90/32. Бумага № 2. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Печ. л. 11½. Усл. печ. л. 13,46. Уч.-изд. л. 16,703.
Тираж 26 000 экз. Изд. № 9/6473. Зак. 705. Цена 1 р. 10 к.
Воениздат
103160, Москва, К-160
2-я типография Воениздата
191065, Ленинград, Д-65, Дворцовая пл.,